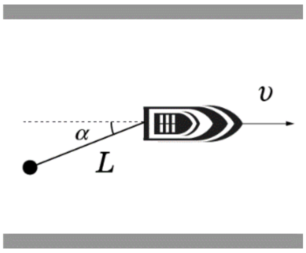
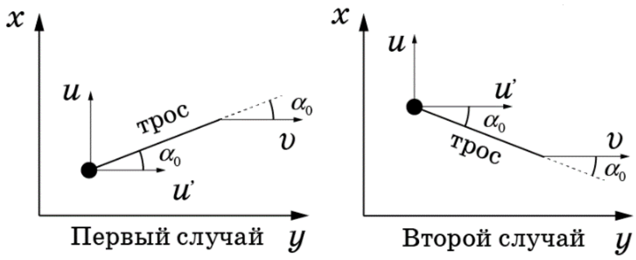
10 класс

Задача 1. Воднолыжник. Катер едет посередине прямого длинного канала фиксированной ширины с постоянной скоростью υ. За катером на натянутом все время тросе длиной L курсирует от одного берега канала до другого воднолыжник. В момент времени, когда расстояние между лыжником и правым берегом увеличивалось со скоростью u, а трос составлял с направлением движения катера угол α_0, спортсмен оторвался от воды. Пренебрегая вертикальной составляющей скорости, найдите модуль скорости u_0 спортсмена в этот момент? Какова в этот же момент сила натяжения троса T, если масса спортсмена m? На рисунке в качестве иллюстрации показан вид сверху в некоторый момент движения воднолыжника.



Возможное решение: Разложим скорость спортсмена относительно берега на две составляющие: перпендикулярную берегу u и продольную u'. Так как расстояние от спортсмена до точки катера, к которой прикреплен трос, не меняется, то проекции скоростей воднолыжника и катера на линию, проходящую через трос, должны быть одинаковы.



В первом случае, когда спортсмен находится между правым берегом и катером, получим: $v\cos\alpha_0 = u'\cos\alpha_0 + u\sin\alpha_0$, тогда $u' = v - u\,\mathrm{tg}\alpha_0$.

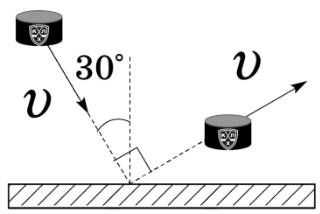
Во втором случае, когда спортсмен находится между катером и левым берегом, получим: $v\cos\alpha_0 = u'\cos\alpha_0 - u\sin\alpha_0$, тогда $u' = v + u\,\mathrm{tg}\alpha_0$.

Модуль скорости спортсмена относительно берега $u_0 = \sqrt{u^2 + u'^2} = \sqrt{u^2 + (v \pm u\,\mathrm{tg}\alpha_0)^2}$.

Так как относительно катера воднолыжник движется по окружности радиусом L, то сила натяжения троса $T = \frac{mu_{\text{отн}}^2}{L}$, где $u_{\text{отн}}^2 = u^2 + (u' - v)^2 = u^2(1 + \mathrm{tg}^2\alpha_0) = \frac{u^2}{\cos^2\alpha_0}$.

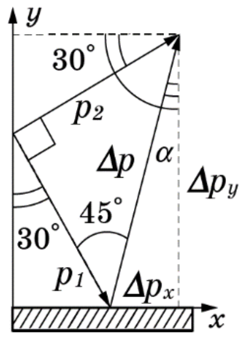
Окончательно, $T = \frac{mu^2}{L\cos^2\alpha_0}$.

22 января на портале http://abitu.net/vseros будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.



Задача 2. Шайбу! Шайба летит в сторону движущейся поступательно тяжёлой плиты так, что их плоскости параллельны. Вектор скорости шайбы составляет угол φ = 30˚ с нормалью к поверхности плиты. Происходит столкновение. Векторы скорости шайбы до и после столкновения одинаковы по модулю и перпендикулярны друг другу (см. рисунок). Кроме того, они лежат в одной плоскости с вектором скорости плиты. Определите минимальное и максимальное значения коэффициента трения μ, при которых возможно такое столкновение.

Возможное решение.



Свяжем импульсы шайбы до и после удара: $\vec{P}_2 = \vec{P}_1 + \Delta\vec{P}$ (см. рисунок).

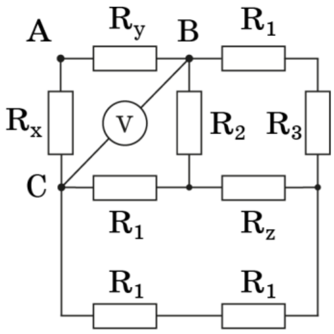
Из рисунка видно, что вектор $\Delta\vec{P}$ образует с вертикалью (осью OY) угол $\alpha = 90^\circ - 45^\circ - 30^\circ = 15^\circ$.

Если после столкновения шайбы с плитой проекция скорости шайбы на ось OX меньше проекции скорости плиты на ту же ось, то это значит, что в течение всего времени столкновения шайба скользила по плите и, следовательно, $F_{\text{Тр.}} = \mu N$. Здесь N – нормальная реакция опоры. В таком случае

$$\frac{\Delta P_X}{\Delta P_Y} = \frac{\left(\dfrac{\Delta P_X}{\Delta t}\right)}{\left(\dfrac{\Delta P_Y}{\Delta t}\right)} = \frac{F_{\text{Тр.}}}{N} = \mu = \tan\alpha \approx 0,27 \ \ (\text{или } \mu = \tan 15^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = 2-\sqrt{3}).$$

Если же после столкновения шайбы с плитой проекция скорости шайбы на ось OX сравняется с проекцией скорости плиты на ту же ось, то коэффициент трения μ может быть любым большим 0,27.

Задача 3. Девять резисторов. Электрическая цепь состоит из 9 резисторов и идеального вольтметра (см. рисунок). Сопротивление трех резисторов R_x, R_y и R_z неизвестны, сопротивления остальных: R_1 = 1 кОм, R_2 = 2 кОм, R_3 = 3 кОм. При подключении к точкам A и B источника с постоянным напряжением U_0 = 10 В вольтметр показывает U_1 = 4 В, при подключении того же источника к точкам A и C показания вольтметра U_2 = 5 В.



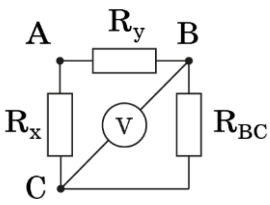
Определите:

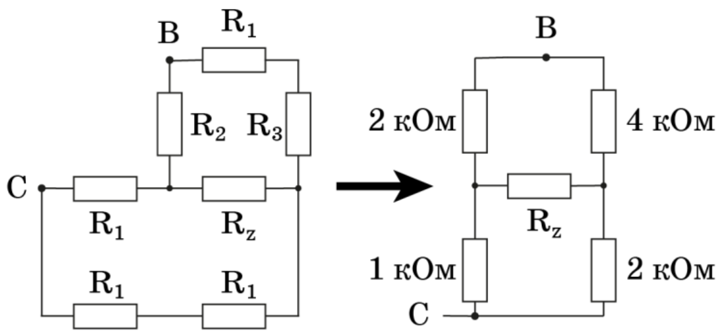
1) значения сопротивлений R_x, R_y и R_z;

2) значения силы тока через источник при подключении его к точкам A и B (I_{AB}) и к точкам A и C (I_{AC}).

Возможное решение.

Перерисуем схему в виде, показанном на левом рисунке. Здесь R_{BC} – сопротивление участка схемы BC, который может быть преобразован (правый рисунок) в сбалансированный мостик с не зависящим от R_z сопротивлением R_{BC} = 2 кОм.





Таким образом, R_z может быть любым. Показания вольтметра при подключении источника к A и B:

$$U_1 = U_0 \frac{R_{BC}}{R_x + R_{BC}}$$

Отсюда находим, что R_x = 3 кОм.

Аналогично, при подключении источника к точкам A и C:

$$U_2 = U_0 \frac{R_{BC}}{R_y + R_{BC}}$$

Отсюда находим, что R_y = 2 кОм.

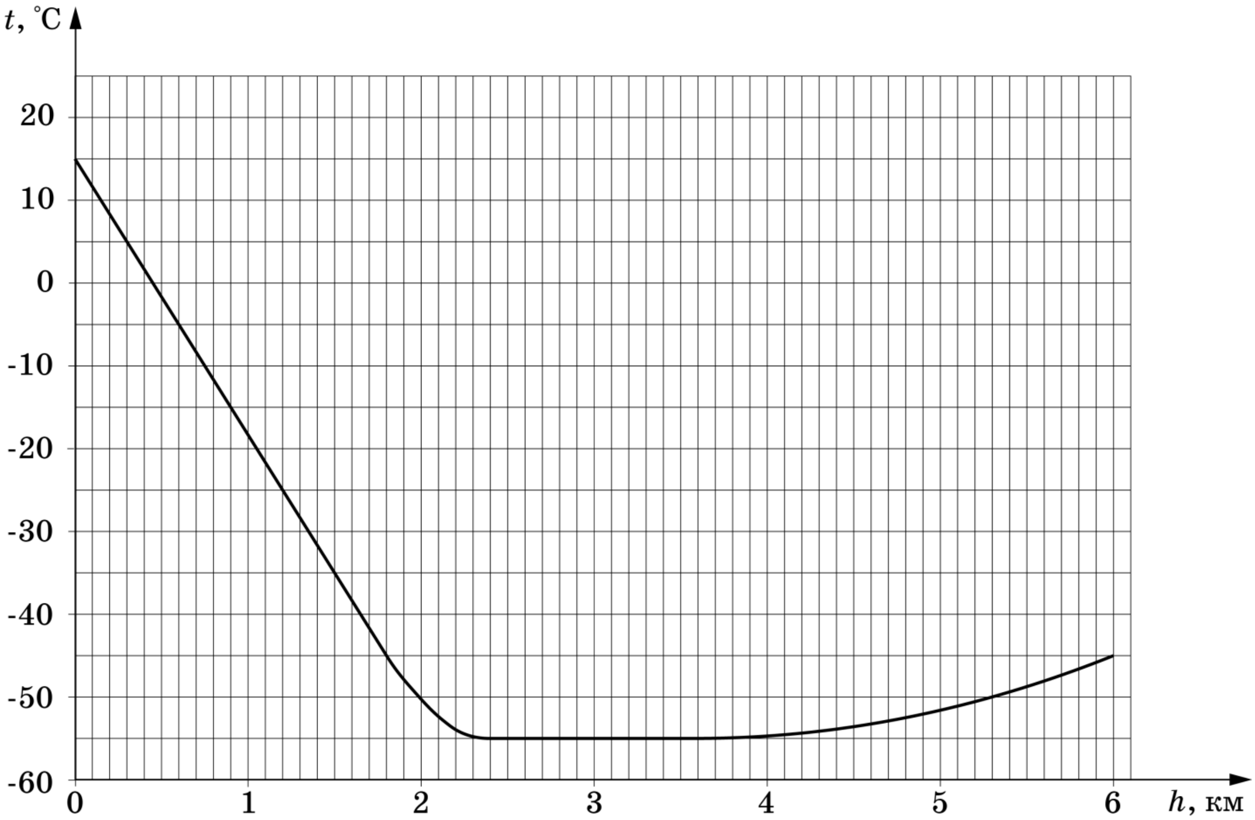
Силы токов I_{AB} и I_{AC} определить не составляет труда:

$$I_{AB} = \frac{U_0}{R_y} + \frac{U_0}{R_x + R_{BC}} = 7\,мА$$

$$I_{AC} = \frac{U_0}{R_x} + \frac{U_0}{R_y + R_{BC}} = \frac{35}{6}\,мА$$

22 января на портале http://abitu.net/vseros *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*

Задача 4. На планете R19. В далеком космосе астронавты исследовали атмосферу планеты R19. Оказалось, что она очень похожа на атмосферу Земли: состоит из идеального газа с молярной массой μ = 28 г/моль и имеет схожую зависимость температуры от высоты (см. рис.). И даже ускорение свободного падения у поверхности R19 равно g = 9,9 м/с^2. Однако, атмосферное давление на уровне моря отличается от земного. Оно равно p_0 = 500 кПа. Определите по этим данным, пренебрегая изменением g с высотой, давление p_1 и плотность ρ_1 на высоте h_1 = 1,0 км. Универсальная газовая постоянная R = 8,31 Дж/(моль·К).

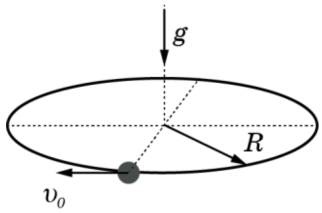


Возможное решение.

1) Заметим, что на участке от 0 до 2 км зависимость температуры от высоты линейная убывающая: $T = T_0 - \alpha h$. Из графика $\alpha = \left|\frac{\Delta T}{\Delta h}\right| = 33{,}3\,\frac{\text{К}}{\text{км}}$.
2) Получим зависимость $p(h)$.
   При малом изменении высоты на Δh давление изменяется на $\Delta p = -\rho g \Delta h$, где плотность газа $\rho = \frac{p\mu}{RT}$. Тогда $\frac{\Delta p}{p} = -\frac{\mu g}{RT}\Delta h = \frac{\mu g}{RT}\frac{\Delta T}{\alpha}$.
   Тогда связь между относительным изменением давления и относительным изменением температуры: $\frac{\Delta p}{p} = k\frac{\Delta T}{T}$, где $k = \frac{\mu g}{R\alpha} \approx 1$.
   Это означает, что давление также линейно убывает с высотой и $\frac{\Delta p}{\Delta h} = -\rho g = const$.
3) Таким образом, плотность атмосферы постоянна от 0 до 2 км:
   $\rho = \rho_0 = \frac{p_0\mu}{RT_0} = 5{,}85$ кг/м^3.
4) Давление на высоте 1 км $p_1 = p_0 - \rho_0 g h = 442$ кПа.

22 января на портале http://abitu.net/vseros *будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.*

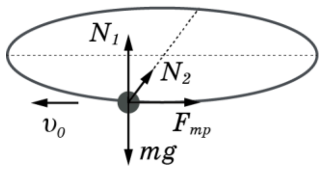
Задача 5. Бусинка на кольце. На тонкое проволочное кольцо радиусом R свободно надета бусинка массой m. Кольцо неподвижно и расположено горизонтально в поле тяжести g. Коэффициент трения скольжения между бусинкой и кольцом равен μ. В начальный момент времени бусинка движется со скоростью v_0.



1) Найдите модуль силы трения, действующей на бусинку, в начальный момент времени.
2) Найдите модуль полного ускорения бусинки в этот же момент.
3) Запишите выражение, позволяющее с погрешностью не более 2% найти путь бусинки за время, в течение которого ее скорость уменьшилась на 1%.

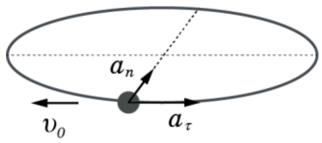
Возможное решение.

1) Сила нормальной реакции опоры $\vec{N} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$, где $|\vec{N}_1| = mg$ – ее вертикальная составляющая, $|\vec{N}_2| = \frac{mv_0^2}{R}$ – горизонтальная составляющая в начальный момент времени. Сразу после начала движения модуль силы трения, действующей на бусинку, $F_{\text{тр}} = \mu N$, где $N = \sqrt{N_1^2 + N_2^2}$.



Окончательно, $F_{\text{тр}} = \mu m\sqrt{g^2 + \left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2}$.

2) Полное ускорение бусинки $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$, где $a_n = \frac{v_0^2}{R}$ – нормальная составляющая ускорения в начальный момент времени, $a_\tau = \frac{F_{\text{тр}}}{m} = \mu\sqrt{g^2 + \left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2}$ – тангенциальная составляющая. Сразу после начала движения модуль полного ускорения:



$$a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \sqrt{(\mu g)^2 + (1+\mu^2)\left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2}.$$

3) Необходимая точность будет обеспечена при использовании приближенных формул: $\Delta S = v_0 \Delta t$; $\Delta v = a_\tau \Delta t$, где ΔS – искомый путь, Δt – время после начала движения, за которое скорость бусинки уменьшилась на 1%. Тогда

$$\Delta S = \frac{v_0 \Delta v}{a_\tau} = \frac{v_0^2 \cdot 10^{-2}}{a_\tau} = \frac{v_0^2}{\mu\sqrt{g^2 + \left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2}} \cdot 10^{-2}.$$

22 января на портале http://abitu.net/vseros будет проведён онлайн-разбор решений задач теоретического тура. Начало разбора (по московскому времени): 7 класс – 11.00; 8 класс – 12.00; 9 класс – 13.00; 10 класс – 14.30; 11 класс – 16.00.

Уточненные критерии
10 класс
Задача 1

1	В любой системе координат записано уравнение кинематической связи между скоростью спортсмена и скоростью катера для двух случаев. Если рассмотрен только один случай – ставится 1,5 балла.	2 балла
2	Получено выражение для продольной составляющей скорости спортсмена относительно берега (спортсмен между правым берегом и катером)	1 балл
3	Получено выражение для продольной составляющей скорости спортсмена относительно берега (спортсмен между левым берегом и катером)	1 балл
4	Получен ответ на первый вопрос (для обоих рассмотренных случаев) – по 0,5 балла за каждый случай. При решении задачи можно использовать любую удобную систему координат (для п. 2 и п. 3) – все правильные решения должны оцениваться соответствующим баллом.	1 балл
5	В системе отсчета, связанной с катером, записан второй закон Ньютона для движения лыжника по окружности ($T = ma_{цс}$).	2 балла
6	Получено выражение для скорости спортсмена относительно катера	2 балла
7	Получено выражение для силы натяжения троса	1 балл

Задачу можно сразу решать, перейдя в систему отсчета, связанную с катером. Такой способ решения должен оцениваться эквивалентно.

Если полученное при рассмотрении одного случая выражение для скорости спортсмена автоматически правильно учитывает оба случая – ставится 10 баллов.

Задача 2

1	Отмечено (или явно использовано при решении), что изменение проекций скорости шайбы на оси OX и OY происходит из-за действия сил нормальной реакции опоры (1 балл) и силы трения (2 балла)	3 балла
2	Указано, что возможны два случая в зависимости от μ: - x-проекция скорости шайбы после столкновения меньше x-проекции скорости плиты (проскальзывание не прекратилось – малые μ) – 1 балл; - x-проекция скорости шайбы после столкновения равна x-проекции скорости плиты (проскальзывание прекратилось – большие μ) – 1 балл.	2 балла
3	Записаны уравнения для изменений проекций импульса шарика на оси OX и OY	2 балла
4	Получено значение $\mu_{\min}$ (через угол α или в эквивалентной форме)	1 балл
5	Отмечено, что при всех $\mu > \mu_{\min}$ проскальзывание исчезает до момента прекращения контакта плиты и шайбы (при этом x-проекции скорости шайбы и плиты сравниваются, а угол отскока не зависит от μ). В этом случае значение μ может быть сколь угодно велико.	2 балла

Возможны разные методы решения – графический и аналитический. Правильные решения нужно оценивать в 10 баллов.

Задача 3

1	Аргументированное объяснение произвольности номинала R_z	2 балла
2	Правильно найдено сопротивление R_{BC}	2 балла
3	Правильно найдено сопротивление R_x	2 балла
4	Правильно найдено сопротивление R_y	2 балла
5	Правильно найдена сила тока I_{AB}	1 балл
6	Правильно найдена сила тока I_{BC}	1 балл

Задача 4

1	Для линейного начального участка графика найдено $\left\|\frac{\Delta T}{\Delta h}\right\| = 33{,}3\,\frac{\text{К}}{\text{км}}$	1 балл
2	Записано выражение $\Delta p = -\rho g \Delta h$	1 балл
3	Записано выражение для плотности газа $\rho = \frac{p\mu}{RT}$	1 балл
4	Получено выражение для связи между относительными изменениями давления и температуры при малом изменении высоты: $\frac{\Delta p}{p} = k\frac{\Delta T}{T}$, где $k = \frac{\mu g}{R\alpha}$	2 балла
5	Вычислено $k \approx 1$	1 балл
6	Сделан вывод о том, что давление линейно убывает с высотой	1 балл
7	Сделан вывод о том, что плотность атмосферы постоянна от 0 до 2 км	1 балл
8	Вычислена плотность $\rho = 5{,}85\ \text{кг/м}^3$	1 балл
9	Вычислено давление на высоте 1 км: $p_1 = 442$ кПа	1 балл

Возможно решение путем интегрирования соответствующего дифференциального уравнения.

1	Для линейного начального участка графика найдено $\left\|\frac{\Delta T}{\Delta h}\right\| = 33{,}3\,\frac{\text{К}}{\text{км}}$	1 балл
2	Записано выражение $\Delta p = -\rho g \Delta h$	1 балл
3	Записано выражение для плотности газа $\rho = \frac{p\mu}{RT}$	1 балл
4	Получено дифференциальное уравнение	1 балл
5	Правильно проинтегрировано дифференциальное уравнение (решение имеет вид $p(h) = p_0\left(\frac{T_0 - \alpha h}{T_0}\right)^k$), где $k = \frac{\mu g}{R\alpha}$.	2 балла
4	Вычислено $k = \frac{\mu g}{R\alpha} \approx 1$	1 балл
7	Сделан вывод о том, что плотность атмосферы постоянна от 0 до ≈1,8 км, а давление убывает по линейному закону	1 балл
8	Вычислена плотность на указанной высоте $\rho = 5{,}85\ \text{кг/м}^3$	1 балл
9	Вычислено давление на высоте 1 км: $p_1 = 442$ кПа	1 балл

Задача 5

1	Записано выражение для вертикальной составляющей силы нормальной реакции опоры $\left\|\vec{N}_1\right\| = mg$	1 балл
2	Записано выражение для горизонтальной составляющей силы нормальной реакции опоры $\left\|\vec{N}_2\right\| = \frac{mv_0^2}{R}$	1 балл
3	Получено выражение для силы трения $F_{\text{тр}} = \mu m\sqrt{g^2 + \left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2}$	1 балл
4	Записано выражение для нормальной составляющей ускорения $a_n = \frac{v_0^2}{R}$	1 балл
5	Получено выражение для тангенциальной составляющей ускорения $a_\tau = \mu\sqrt{g^2 + \left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2}$	1 балл
6	Записано выражение для модуля полного ускорения $a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2}$	1 балл
7	Записаны приближенные формулы $\Delta S = v_0 \Delta t$; $\Delta v = a_\tau \Delta t$ (по 1 баллу за каждую формулу)	2 балла
8	Получен ответ в виде $\Delta S = \frac{v_0 \Delta v}{a_\tau}$	1 балл
9	Получено конечное выражение для ответа $\Delta S = \frac{v_0^2}{\mu\sqrt{g^2 + \left(\frac{v_0^2}{R}\right)^2}} \cdot 10^{-2}$	1 балл