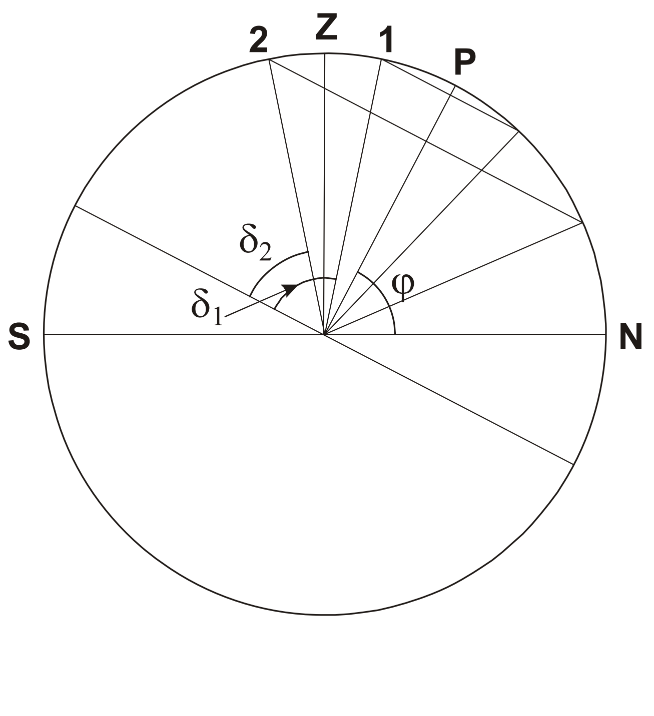
2. Решения заданий Регионального этапа и система оценивания каждого задания.

9 класс

1. Условие. Верхние кульминации разных звезд 1 и 2 происходят одновременно на одинаковой высоте над горизонтом. Нижняя кульминация звезды 1 происходит над горизонтом, причем вдвое выше, чем у звезды 2. На каких широтах такое возможно? Рефракцией пренебречь.

1. Решение. Из условия задачи следует, что у обеих звезд нижняя кульминация происходит над горизонтом, то есть, они являются незаходящими в пункте наблюдений. Более того, нижняя кульминация звезды 1 выше, чем у звезды 2, то есть она располагается ближе к видимому полюсу мира (точка **P** на рисунке). Рассмотрим северное полушарие Земли, учитывая, что в южном мы получим аналогичный ответ.



Нижняя кульминация обеих звезд происходит над северным горизонтом на разных высотах, следовательно, их склонение положительно и различно, у звезды 1 склонение больше. При этом верхняя кульминация происходит на одинаковой высоте. Это может быть в том случае, если более северная звезда 1 проходит верхнюю кульминацию к северу от зенита, а звезда 2 – к югу от зенита. Это значит, что склонение первой звезды δ_1 больше широты места φ, а склонение второй звезды 2 δ_2 меньше широты. Тогда условие задачи может быть переписано в математическом виде:

$$90° + \varphi - \delta_1 = 90° - \varphi + \delta_2;$$
$$-90° + \varphi + \delta_1 = 2\,(-90° + \varphi + \delta_2).$$

При этом все три величины (φ, δ_1, δ_2) должны быть неотрицательными (формулы выше справедливы только в северном полушарии, южное полушарие мы рассмотрим отдельно) и не должны превосходить 90°. Помимо этого, высоты обоих светил в нижней кульминации должны быть больше нуля. Так как они связаны множителем 2, достаточно проверить положительность любой одной из этих высот. Из второго уравнения получаем связь склонений звезд:

$$\delta_1 = -90° + \varphi + 2\delta_2.$$

Подставляя его в первое уравнение, имеем:

$$180° - 2\delta_2 = 90° - \varphi + \delta_2;$$
$$\delta_2 = (90° + \varphi)\,/\,3.$$

Для любых положительных значений φ на интервале (0° .. 90°] величина δ_2 также попадает в этот интервал. Проверим, на каких широтах нижняя кульминация будет происходить над горизонтом:

$$-90° + \varphi + \delta_2 = -90° + \varphi + (90° + \varphi)\,/\,3 = -60° + 4\varphi\,/3 \geq 0;$$
$$\varphi \geq 45°.$$

Определим теперь склонение первой звезды:

$$\delta_1 = -90° + \varphi + 2(90° + \varphi)/3 = -30° + 5\varphi\,/3.$$

Эта величина будет неотрицательна на широтах $\varphi \geq 3\cdot30°/5 = 18°$. Она не будет превышать 90° на широтах $\varphi \leq 3\cdot120°/5 = 72°$. Высота звезды 1 в нижней кульминации, как и высота звезды 2, будет положительной на широтах $\varphi > 45°$. С учетом трех полученных ограничений, мы можем сделать вывод, что в северном полушарии такая ситуация может иметь место на широтах в интервале (45° .. 72°]. Аналогично, она может наступить в южном полушарии в интервале широт [–72° .. –45°).

1. Система оценивания. Так как задание оперирует с такой величиной, как высота светила в верхней и нижней кульминации, решение, вообще говоря, должно включать в себя рассмотрение разных случаев, соответствующих разным положением звезд на небесном меридиане относительно зенита в этот момент. В данном случае достаточно показать, что при рассмотрении северного полушария нижние кульминации обеих звезд происходят к северу от зенита, а верхние кульминации – по разные стороны от зенита. Этот вывод в текстовом или графическом исполнении оценивается в 1 балл.

Дальнейшее решение можно вести алгебраически, как изложено выше, либо на основе анализа рисунка с дальнейшим переходом к записи уравнений. При алгебраическом подходе правильное соотношение склонений обеих звезд и широты (их можно записывать как выражение склонения через широту, широты и одного склонения через другое склонение) оценивается в 2 балла. Еще по 1 баллу выставляется за корректный учет двух ограничений (высоты положительны; широта и склонения имеют одинаковый знак и не превосходят по модулю 90°), всего 2 балла. Запись итогового интервала широт оценивается в 1 балл при условии правильного выполнения предыдущих этапов. Включение или исключение границ в интервале на оценку не влияют. Наконец, учет случая южного полушария оценивается в 2 балла.

К примеру, если участник забывает о требовании положительной высоты светил в нижней кульминации, то при правильных вычислениях он получает интервал широт [18°..72°]. При таком решении ему не выставляется 1 балл за проверку одного из ограничений и 1 балл за правильную запись интервала. Оценка составляет 4 или 6 баллов в зависимости от указания случая южного полушария.

Участник олимпиады может добавить в качестве решения случай двух звезд в полюсах мира, наблюдаемых на экваторе. Тогда высоты обеих звезд в верхней и нижней кульминациях будут равны нулю. Однако, этот случай, как и вариант двух совпадающих звезд с нижней кульминацией на горизонте, не удовлетворяет условию, так как сказано, что звезды разные. а их нижняя кульминация наступает над горизонтом. Учет этих вырожденных случаев уменьшает оценку на 1 балл.

2. Условие. Астроном наблюдает прохождение геостационарного спутника Земли по диаметру диска Луны. Какова может быть длительность такого явления? Орбиту Луны считать круговой и лежащей в плоскости экватора Земли.

2. Решение. Проще всего решить эту задачу, вспомнив, что геостационарный спутник обращается вокруг Земли с тем же периодом, что и сама Земля вокруг своей оси, и видимое положение спутника при наблюдении с поверхности Земли не изменяется. Поэтому достаточно определить, за какое время диск Луны в своем видимом движении по небу Земли пройдет угловое расстояние, равное своему диаметру. Если бы Луна не перемещалась на небе относительно звезд, то ее угловая скорость относительно спутника и земных объектов была бы равна угловой скорости вращения Земли (и геостационарного спутника):

$$\omega_0 = \frac{360^{\circ}}{T} \approx 15^{\circ}/\text{ч}.$$

Здесь T – период осевого вращения Земли (23ч56м). Приближенное значение длительности прохождения спутника составит

$$t_0 = \frac{\delta}{\omega_0} = \frac{T\delta}{360^{\circ}} = 2.07 \text{ мин}.$$

Здесь δ – угловой диаметр Луны (0.518°). Сейчас получена лишь приближенная величина. В реальности, Луна обращается вокруг Земли по орбите с угловой скоростью

$$\Omega = \frac{360^{\circ}}{S} \approx 0.55^{\circ}/\text{ч}.$$

Здесь S – сидерический период Луны. Мы пренебрегаем углом наклона орбиты Луны к экватору и считаем скорости сонаправленными. С учетом этого, мы можем получить более точное выражение для продолжительности прохода спутника перед диском Луны:

$$t = \frac{\delta}{\omega_0 - \Omega} = 2.14 \text{ мин}.$$

Это уже достаточно точная оценка. Можно также учесть, что если дело происходит на экваторе, и Луна располагается в зените, то за счет осевого вращения Земли ее видимая угловая скорость уменьшается до величины

$$\Omega_Z = \frac{v - V}{L - R} = \frac{L \cdot \Omega - R \cdot \omega_0}{L - R} \approx 0.31^{\circ}/\text{ч}.$$

Здесь v – орбитальная скорость Луны, V – скорость точки экватора Земли, L – расстояние до Луны, R – радиус Земли. За счет уменьшения угловой скорости Луны перемещение спутника по ее диску будет происходить быстрее. Но угловой диаметр Луны δ_Z в этом случае увеличивается до

$$\delta_Z = \frac{\delta \cdot L}{L - R} = 0.527^{\circ}.$$

Продолжительность явления в зените составляет

$$t_Z = \frac{\delta_Z}{\omega_0 - \Omega_Z} = \frac{\delta \cdot L}{L - R} \cdot \frac{L - R}{(\omega_0 - \Omega) \cdot L} = \frac{\delta}{\omega_0 - \Omega} = t.$$

Можно показать, что эта величина вообще не зависит от высоты Луны над горизонтом во время явления.

2. Система оценивания. Решение задачи можно вести с точки зрения наблюдателя на поверхности Земли, для которого геостационарный спутник будет соответствовать неподвижной точке неба, через которую проходит диск Луны. Можно решать задачу более классическим способом, вычисляя угловые скорости Луны и спутника относительно звезд. В обоих случаях, выполнение задачи в пренебрежении угловым перемещением Луны оценивается в 5 баллов, возможен округленный вариант ответа: 2 минуты. Учет угловой скорости Луны как постоянной величины (Ω в решении выше) и получение ответа с точностью до 0.1 минуты достаточен для выставления максимальной оценки в 8 баллов.

Участник олимпиады может также учесть приближение к Луне точки экватора и изменение ее угловой скорости, что при условии правильного выполнения не меняет окончательный ответ и оценку. Если же учтен только один фактор (только приближение наблюдателя к Луне или только изменение ее угловой скорости), то ответ меняется примерно на 0.1 минуты, а оценка снижается на 2 балла.

3. Условие. При наблюдении прохождения Венеры по диску Солнца в июне 2012 года освещенность, создаваемая Солнцем на Земле, упала на 1/1000 от своего значения. Во сколько раз больше или меньше относительное падение освещенности от Солнца во время прохождения Венеры для наблюдателя на Марсе? Орбиты планет считать круговыми.

3. Решение. Уменьшение освещенности пропорционально доли площади Солнца, закрываемую Венерой. Марс находится в 1.524 раз дальше от Солнца, чем Земля. Значит видимый диаметр Солнца на Марсе также в 1.524 раза меньше, чем на Земле. Венера движется по орбите с радиусом 0.723 а.е. и в нижнем соединении располагается для марсиан в $(1.524-0.723)/(1.000-0.723) \approx 2.892$ раз дальше, а значит имеет в 2.892 раз меньший угловой диаметр. В итоге, эффект уменьшения освещенности, пропорциональный отношению квадратов видимых диаметров Венеры и Солнца, на Марсе будет меньшим, чем на Земле. Соответствующее отношение составит $(1.524/2.892)^2 = 0.278 \sim 1/3.60$.

Эффект уменьшения яркости Солнца во время прохождения по его диску Венеры на Марсе будет в 3.60 раза меньшим, чем на Земле, само уменьшение составит примерно 0.00028.

3. Система оценивания. Решение задачи может быть выполнено как последовательно, с выписыванием отдельно формул для углового размера Солнца и Венеры, видимых с Земли и с Марса, и их дальнейшим сопоставлением, так и с помощью записи одной формулы в строку. Если решения правильные, они оцениваются полностью. Участники могут воспользоваться заданными в справочных данных размерами Солнца и Венеры для вычисления их угловых размеров. Это не является ошибкой, поскольку эти величины на итоговый ответ не влияют. Если участник олимпиады придерживается той же схемы решения, что дана выше, то за правильную формулу для углового размера Солнца для наблюдателя с Земли и с Марса он получает по 1 баллу. За правильную формулу для углового размера Венеры для наблюдателя на Земле и на Марсе он получает по 1 баллу. Если на этих этапах ошибок нет, то за запись правильной итоговой формулы выставляется 3 балла, и еще 1 балл за правильный итоговый ответ. Максимальная оценка за задачу – 8 баллов.

Возможные ошибки при решении:

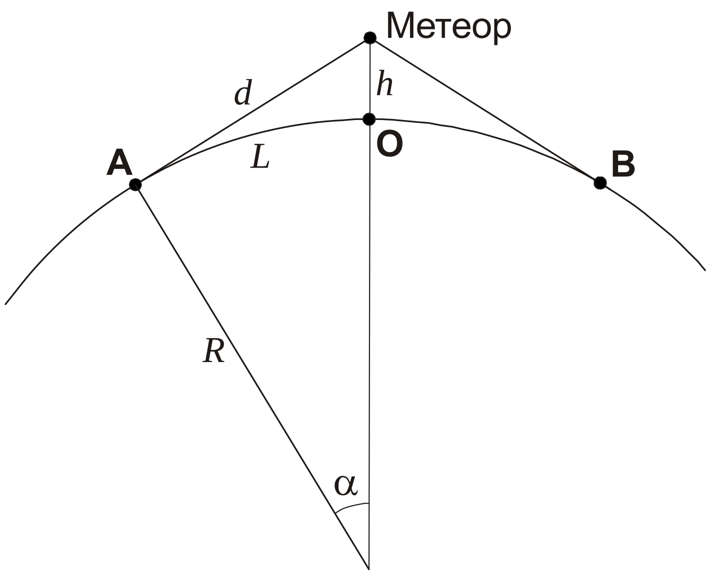
– Марс в 1.524 раза дальше от Солнца чем Земля, поэтому падение освещенности будет больше/меньше в 1.524 раза. Такое решение оценивается в 1 балл.

– Расстояние и до Солнца, и до Венеры при наблюдении с Марса в 1.524 раза больше, поэтому их угловые размеры изменятся одинаково и доля площади Солнца, закрытая Венерой, не изменится (т. е. не учтено, что Венера ближе к Земле и Марсу, чем Солнце). За такое решение выставляется 2 балла.

– в итоговой формуле вместо изменения телесного угла Солнца/Венеры вычисляется только изменение их углового размера (нет возведения в квадрат) В этом случае за итоговую формулу ставится 1 балл вместо 3 баллов, ответ не оценивается. Максимальная оценка составляет 5 баллов.

4. Условие. Метеор наблюдался на поверхности Земли в обширной области радиусом 1000 км, и в двух наиболее удаленных друг от друга точках этой области он имел блеск 0^m. Какова была максимальная звездная величина метеора, видимая с поверхности Земли? Длиной пути метеора, рельефом Земли, атмосферной рефракцией и поглощением света пренебречь.

4. Решение. Размер области, в которой можно наблюдать метеор, в пренебрежении рефракцией и поглощением, можно определить из геометрических соображений.



Две наиболее удаленные друг от друга точки поверхности Земли, где можно увидеть метеор, обозначены как **A** и **B**. Они равноудалены по поверхности Земли от точки **O**, ближайшей к метеору, где он наблюдается в зените, на расстояние L. Угол в центре Земли, образованный направлениями на метеор и точку **A**, равен

$$\alpha = (L/R) \text{ рад} = 0.157 \text{ рад} = 9°.$$

Здесь R – радиус Земли. Расстояние от точек **A** и **B** до метеора равно

$$d = R \operatorname{tg} \alpha = 1010 \text{ км} \approx L.$$

Расстояние от метеора до ближайшей точки Земли **O** – высота метеора – равна:

$$h = R\left(\frac{1}{\cos\alpha} - 1\right) \approx 80 \text{ км}.$$

Это значение можно получить с помощью приближенной формулы с учетом малости угла α:

$$h = R\cdot\left(\frac{1}{1-\alpha^2/2}-1\right)\approx\frac{R\alpha^2}{2}=\frac{L^2}{2R}.$$

Звездная величина метеора с расстояния d (или L) равна $m_0 = 0$. Пренебрегая атмосферным поглощением, находим звездную величину с расстояния h:

$$m = m_0 - 5\lg\frac{h}{d} = m_0 - 5\lg\frac{L}{2R}\approx -5.5.$$

Из точки **O** метеор выглядел как яркий болид.

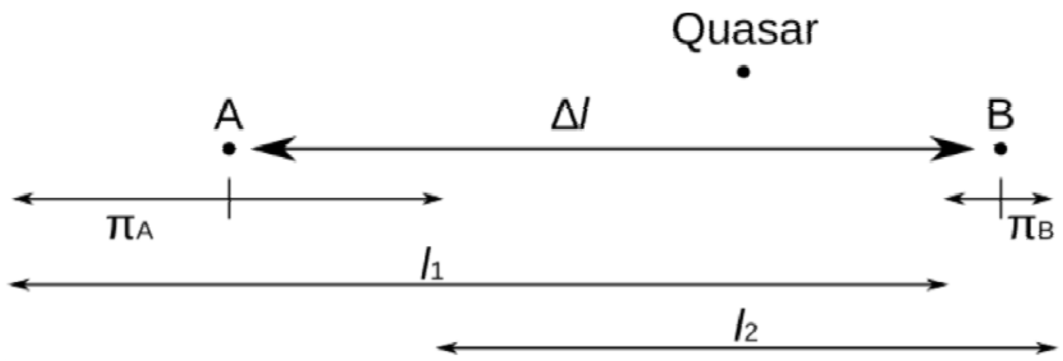
4. Система оценивания. Решение задания состоит из нескольких простых частей, которые можно выполнять в виде формул или численно, точно или приближенно (фактически, считая угол α в решении выше малым). Каждый подход допустим и оценивается максимально при условии правильного выполнения. Первый этап состоит в вычислении расстояния от метеора до точек **A** и **B** (или указания, что оно фактически равно заданному расстоянию L). Этот этап оценивается в 1 балл. При получении расстояния, существенно отличного от L (более чем на 100 км), вне зависимости от причины ошибки этот балл не выставляется.

Вычисление расстояния от метеора до точки **O** (высоты метеора) оценивается в 4 балла, при этом допустимая ошибка составляет 3 км (при ошибке до 10 км оценка снижается на 2 балла). Наконец, определение звездной величины метеора оценивается еще в 3 балла. При ошибке в знаке итоговой величины ($+5.5^{m}$ в ответе) оценка уменьшается на 1 балл, если это вызвано случайными причинами при вычислении, и на 3 балла, если причиной было неверное трактование (использование формул) шкалы звездных величин участником.

Среди работ участников могут встретиться решения, где высота метеора берется как известная (80-100 км). В этом случае за первые два этапа из 5 баллов выставляется только 2 балла, второй этап оценивается полностью при условии правильного выполнения (3 балла). Максимальная оценка в этом случае составляет 5 баллов.

5. Условие. Звезды **A** и **B** наблюдаются близко друг к другу на эклиптике. Используя далекую звезду **B**, располагающуюся в той же области неба и у которой не наблюдался параллакс, в качестве звезды сравнения, астроном определил по параллактическому смещению, что звезда **A** находится на расстоянии 62.5 парсек от Солнца. Позже более точные измерения показали, что звезда **B** располагается гораздо ближе, чем считалось, всего лишь на расстоянии 200 пк. Определите, как это повлияет на оценку расстояния до звезды **A**, и определите его уточненное значение.

5. Решение. Если расстояние до звезды **B** равно L_B = 200 пк, то параллакс этой звезды равен $\pi_B = (1/200)'' = 0.005''$. Значит, относительно очень далекого объекта, например квазара, эта звезда совершает параллактические колебания с амплитудой π_B.



Раз расстояние до звезды **A** было определено как L_A' = 62.5 пк, то относительно звезды **B** эта звезда совершала параллактические колебания с амплитудой $\pi_{AB} = (1/62.5)'' = 0.016''$. Поскольку звезды находятся близко, параллактическое смещение для них происходит синхронно. То есть, измеренная амплитуда паралактического смещения звезды **A** оказалась меньше истинной. Пусть Δl – разность эклиптических долгот звезд. Тогда угловое расстояние между звездами в момент максимального параллактического смещения к востоку равно

$$l_1 = \Delta l + \pi_A - \pi_B,$$

а в момент максимального западного смещения:

$$l_2 = \Delta l - \pi_A + \pi_B.$$

Тогда смещение звезды **A** относительно звезды **B** равно

$$\pi_{AB} = (l_1 - l_2) / 2 = \pi_A - \pi_B.$$

В итоге, истинный параллакс звезды **A** равен

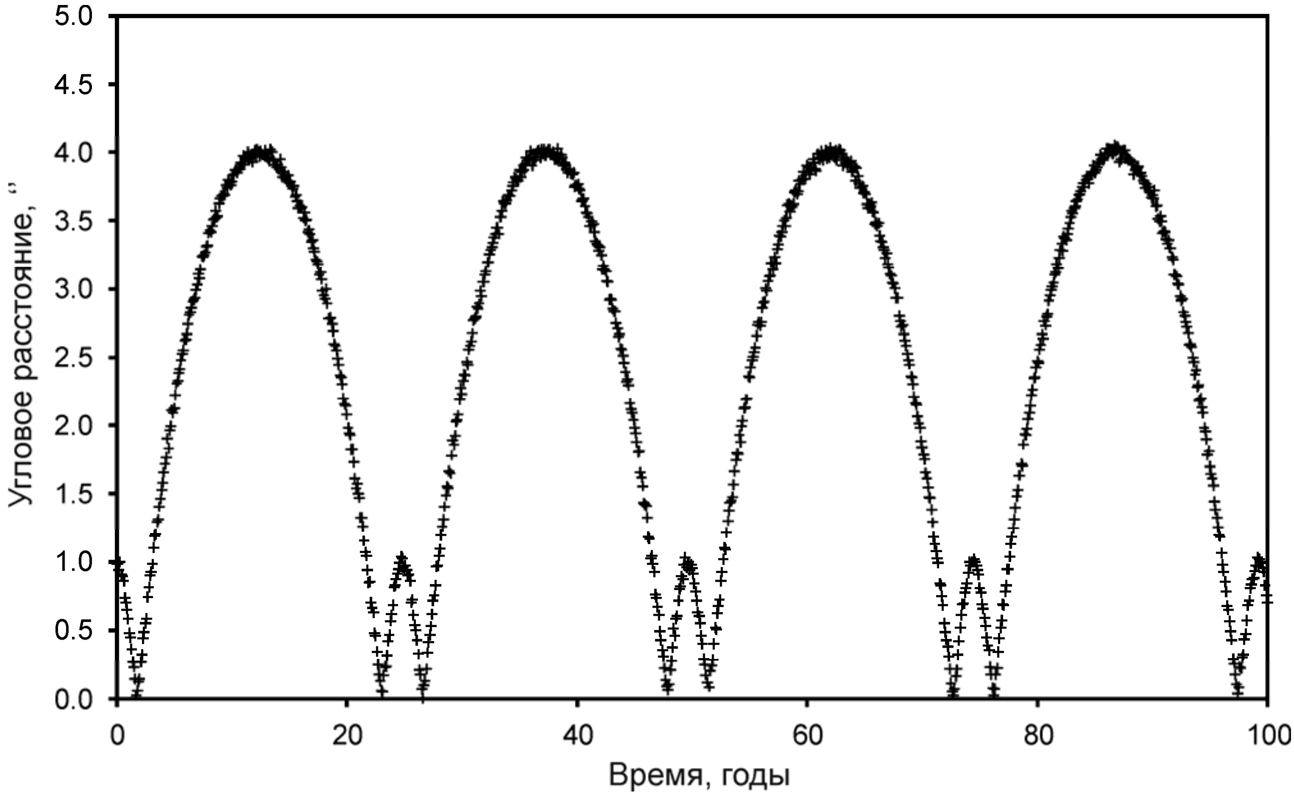
$$\pi_A = \pi_{AB} + \pi_B = 0.016'' + 0.005'' = 0.021'',$$

и звезда **A** находится на расстоянии $L_A = (1 / 0.021) \approx 47.6$ пк от Солнца.

5. Система оценивания. Объяснение влияния параллакса звезды **B** на измерение параллакса звезды **A** оценивается в 2 балла. Под этим подразумевается только объяснение того, что параллактическое смещение звезды **B** влияет на определение амплитуды смещения звезды **A**. Знание формулы связи расстояния и параллактического смещения оценивается 1 баллом. Правильное вычисление истинного параллакса звезды **A** оценивается в 4 балла. При этом, если формула неверна (параллактические смещения звезд в противофазе и т. п.), то за второй этап баллы не выставляются, на оценку за первый этап это не влияет. Правильный итоговый ответ оценивается еще 1 баллом.

При решении задания участники могут предположить, что уточненное расстояние ло звезды **A** есть сумма или разность приближенного расстояния до этой звезды и расстояния до звезды **B** (то есть, брать расстояния до звезд вместо их параллаксов – обратных величин). Такие решения оцениваются не выше 1 балла.

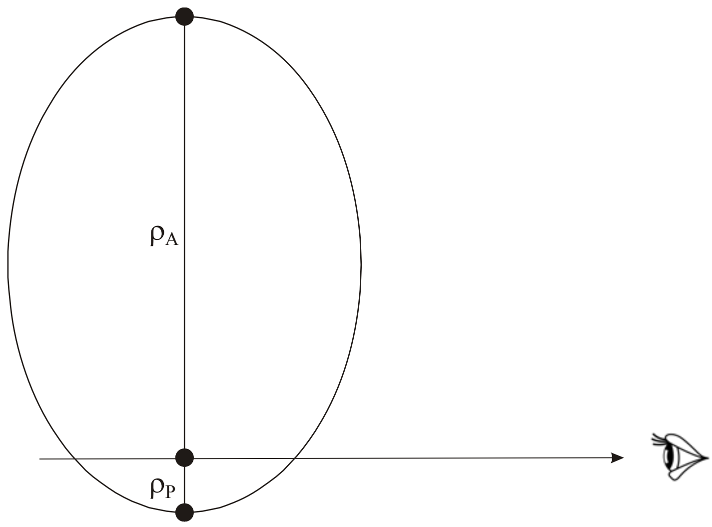
6. Условие. Двойная система состоит из одинаковых компонент, подобных Солнцу. На графике приведена зависимость углового расстояния между ними (в угловых секундах) в небе Земли от времени. Определите эксцентриситет орбиты, наклон плоскости орбиты к лучу зрения и расстояние до системы.



6. Решение. Зависимость углового расстояния между двумя звездами имеет очевидный период *T* около 25 лет. При этом дважды за этот период угловое расстояние между звездами фактически обращается в ноль. Такое может иметь место только в том случае, если луч зрения лежит в плоскости орбиты, и дважды за период обращения звезды проходят друг перед другом. Наклон плоскости орбиты к лучу зрения равен нулю.

Если бы орбиты звезд в системе были круговыми, то эти моменты были бы отделены друг от друга равными промежутками времени, а максимумы между ними были бы одинаковыми. Мы наблюдаем иную картину, то есть орбиты в системе вытянуты.

Будем считать одну из звезд неподвижной, рассматривая движение второй звезды относительно первой. Очевидно, это не меняет форму орбиты. Максимумы углового расстояния разные, но они оба симметричны. Это говорит о том, что они совпадают с прохождением звезды перицентра и апоцентра своей орбиты, и линия апсид лежит в картинной плоскости.



Итак, мы можем сделать вывод, что малые максимумы с угловым расстоянием между звездами ρ_P=1.0″ соответствуют перицентру орбиты, а большие максимумы с угловым расстоянием ρ_A=4.0″ – апоцентру орбиты. Теперь мы можем определить эксцентриситет:

$$e = \frac{\rho_A - \rho_P}{\rho_A + \rho_P} = 0.6.$$

Большая полуось (среднее расстояние между звездами) видна с Земли под углом $\alpha = (\rho_P+\rho_A)/2 = 2.5''$. Пространственную величину большой полуоси мы можем определить из III закона Кеплера:

$$A = (T^2M)^{1/3} = 10.8 \text{ а.е.}$$

Зная, что суммарная масса звезд M равна 2 массам Солнца, получаем расстояние до системы в парсеках:

$$L = (10.8 / 2.5) = 4.3 \text{ пк.}$$

6. Система оценивания. Первый этап задания состоит в выводе о том, что нулевые минимумы углового расстояния соответствуют моментам расположения звезд на одном луче зрения, и наклон плоскости орбит системы к лучу зрения равен нулю (или очень мал). Вывод может быть также сформулирован как перпендикулярность плоскости орбиты и картинной плоскости. Он оценивается в 2 балла и обязателен для дальнейшего решения. Если же минимумы приписываются физическим тесным сближениям звезд, то вне зависимости от полученных результатов оценка не может превышать 2 баллов (за третий этап – см. далее).

Следующий этап заключается в вычислении эксцентриситета орбиты. Это оценивается в 3 балла (1 балл за снятие данных с графика, 1 балл за правильную формулу для эксцентриситета и 1 балл за его вычисление), но только при условии, что перицентр и апоцентр ассоциируются с максимумами на графиках. В противном случае эти 3 балла не выставляются даже при случайном совпадении результата с правильным.

Наконец, последние 3 балла выставляются за нахождения расстояния до системы. Из них 2 балла ставятся за определение пространственной величины большой полуоси системы, и они не зависят от выполнения других этапов задания. Последний балл ставится за нахождение расстояния до системы при условии правильного выполнения всех этапов задания и верного ответа. Если участник не учитывает фактор массы M=2 в III законе Кеплера, третий этап (все три балла) не засчитывается.