Условия и решения задач

9 класс

9.1. На плоскости отмечены 5 точек. Докажите, что можно выбрать некоторые из них и переместить их так, чтобы расстояние между любыми двумя перемещёнными точками не изменилось, а в результате на плоскости осталось множество из 5 точек, симметричное относительно некоторой прямой. (*С. Волчёнков*)

Решение. Обозначим данные точки через A, B, C, D и E. Выберем из них две самые удалённые друг от друга, пусть это A и B. Покажем, что можно переместить их требуемым образом.

Проведём серединный перпендикуляр α к отрезку CD. Если E лежит на α, то достаточно переместить точки A и B на прямую α. Иначе пусть E' — точка, симметричная E относительно α. Заметим, что расстояние от E до α меньше длины одного из отрезков EC и ED, то есть меньше AB.

Таким образом, можно переместить точку A в точку E', а точку B — в точку, лежащую на α и удалённую от E' на расстояние AB. Легко видеть, что α — ось симметрии нового множества точек, что и требовалось.

9.2. При каком наименьшем натуральном n существуют такие целые $a_1, a_2, \ldots, a_n$, что квадратный трёхчлен

$$x^2 - 2(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^2 x + \left(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 + 1\right)$$

имеет по крайней мере один целый корень? (*П. Козлов*)

Ответ. При $n = 6$.

Решение. При $n = 6$ можно положить $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ и $a_5 = a_6 = -1$; тогда трёхчлен из условия принимает вид $x^2 - 8x + 7$ и имеет два целых корня: 1 и 7. Осталось показать, что это — наименьшее возможное значение n.

Пусть числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ удовлетворяют условию задачи; тогда делённый на 4 дискриминант квадратного трёхчлена из условия должен быть полным квадратом. Он равен

$$d = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)^4 - \left(a_1^4 + a_2^4 + \ldots + a_n^4 + 1\right).$$

Тогда число d нечётно и является квадратом, поэтому оно даёт остаток 1 при делении на 8.

Перепишем равенство выше в виде

$$d+1+a_1^4+a_2^4+\ldots+a_n^4=(a_1+a_2+\ldots+a_n)^4$$

и рассмотрим его по модулю 8. Нетрудно проверить, что четвёртые степени целых чисел дают лишь остатки 0 и 1 при делении на 8, то есть правая часть равенства даёт остаток 0 или 1. Левая же часть сравнима с $1+1+k$, где k — количество нечётных чисел среди a_i. Значит, $n \geqslant k \geqslant 6$.

9.3. Окружность Ω с центром в точке O описана около остроугольного треугольника ABC, в котором $AB < BC$; его высоты пересекаются в точке H. На продолжении отрезка BO за точку O отмечена точка D такая, что $\angle ADC = \angle ABC$. Прямая, проходящая через точку H параллельно прямой BO, пересекает меньшую дугу AC окружности Ω в точке E. Докажите, что $BH = DE$.

(*А. Кузнецов*)

Решение. Пусть P — вторая точка пересечения BO с окружностью Ω (см. рис. 1). Тогда BP — диаметр Ω, и $\angle BCP = 90^\circ = \angle BAP$. Значит, $CP \parallel AH$ и $AP \parallel CH$. Следовательно, четырёхугольник $AHCP$ — параллелограмм. Обозначим через M точку пересечения его диагоналей. Она является серединой отрезков PH и AC.

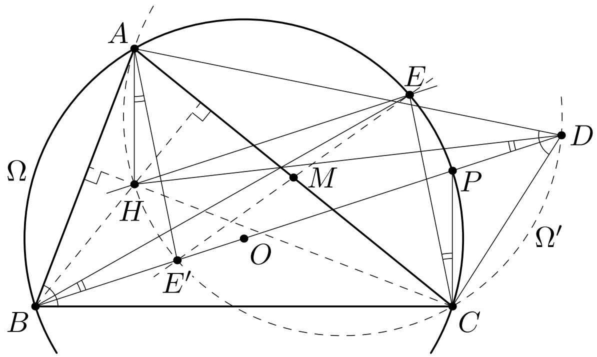

Рис. 1

При симметрии относительно точки M точка A переходит в точку C, а точка P — в точку H. Пусть при этой симметрии точка E переходит в E', а окружность Ω — в Ω'. Тогда точки A,

H, E' и C лежат на Ω'. Поскольку $\angle ADC = \angle ABC = 180^\circ - \angle AHC$, точка D также лежит на Ω'.

В силу симметрии, $\angle ECP = \angle E'AH$, а также $PE' \parallel HE$ — поэтому точка E' лежит на прямой PB. Из вписанности четырёхугольников $AHE'D$ и $BEPC$ получаем, что $\angle EBP = \angle ECP = \angle E'AH = \angle E'DH$. Таким образом, $\angle EBD = \angle BDH$. Это означает, что трапеция $BHED$ — равнобокая, поэтому $BH = DE$.

9.4. В лагерь приехали 10000 детей, каждый дружит ровно с 11 другими детьми в лагере (дружба взаимна). Каждый ребёнок носит футболку одного из семи цветов радуги, причём у любых двух друзей цвета различны. Вожатые потребовали, чтобы какие-нибудь дети (хотя бы один) надели футболки других цветов (из тех же семи). Опрос показал, что 100 детей менять цвет не намерены. Докажите, что некоторые из остальных детей всё же могут изменить цвета своих футболок так, чтобы по-прежнему у любых двух друзей цвета были различны.

(*А. Магазинов*)

Решение. Перейдём к графу, вершины которого соответствуют детям, а рёбра — дружбам. Напомним, что раскраска вершин называется *правильной*, если цвета любых двух вершин, соединённые ребром, различны. Таким образом, граф правильно раскрашен в 7 цветов, в нём выделено 100 *стабильных* вершин, и требуется перекрасить часть остальных вершин так, чтобы раскраска осталась правильной.

Предположим, что это невозможно. Пронумеруем цвета числами $1, 2, \ldots, 7$. Рассмотрим любые два цвета $i < j$. Оставим в графе только вершины этих цветов и рёбра между ними; обозначим полученный граф через G_{ij}. Этот граф может распасться на несколько компонент связности; обозначим через c_{ij} их количество. Если $c_{ij} > 100$, то в одной из компонент нет стабильных вершин; тогда можно изменить цвет каждой вершины в этой компоненте, заменив i на j и наоборот, и добиться требуемой альтернативной раскраски.

Значит, $c_{ij} \leqslant 100$ при всех i и j. Заметим, что каждая компонента связности, содержащая x вершин, содержит не менее

$x-1$ рёбер; значит, если в G_{ij} есть v_{ij} вершин, то количество рёбер в нём e_{ij} не меньше, чем $v_{ij}-c_{ij}$, то есть

$$e_{ij} \geqslant v_{ij}-100. \qquad (*)$$

С другой стороны, нетрудно найти сумму V всех чисел v_{ij} и сумму E всех чисел e_{ij}. Действительно, в исходном графе 10000 вершин, и каждая из них участвует в 6 графах вида G_{ij}; поэтому $V=6\cdot 10000=60000$. С другой стороны, в исходном графе $11\cdot 10000/2=55000$ рёбер, и каждое участвует ровно в одном графе G_{ij}; поэтому $E=55000$.

Но, поскольку пар цветов всего $C_7^2=21$, неравенство $(*)$ влечёт $E \geqslant V-21\cdot 100$, что не так для найденных значений. Значит, наше предположение было неверно, и требуемая перекраска возможна.

Материалы для проведения заключительного этапа

XLV ВСЕРОССИЙСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ

2018–2019 учебный год

Второй день

Пермь, 21–27 апреля 2019 г.

Москва, 2019

Сборник содержит материалы для проведения заключительного этапа XLV Всероссийской олимпиады школьников по математике. Задания подготовлены Центральной предметно-методической комиссией по математике Всероссийской олимпиады школьников.

Сборник составили: Н. Х. Агаханов, А. В. Антропов, Е. В. Бакаев, Д. А. Белов, С. Л. Берлов, И. И. Богданов, С. Г. Волчёнков, А. А. Гайфуллин, Н. А. Гладков, М. А. Григорьев, М. А. Дидин, О. Ю. Дмитриев, В. Л. Дольников, С. А. Дориченко, Л. А. Емельянов, А. П. Зимин, К. А. Кноп, П. А. Кожевников, П. Ю. Козлов, Д. Н. Крачун, С. О. Кудря, А. А. Кузнецов, Ю. В. Кузьменко, А. Н. Магазинов, Е. Г. Молчанов, О. С. Нечаева, О. К. Подлипский, И. С. Рубанов, А. Р. Сафиуллина, К. А. Сухов, Д. А. Терёшин, Б. В. Трушин, И. И. Фролов, А. И. Храбров, Д. Г. Храмцов, Г. Р. Челноков, О. И. Южаков.

В скобках после каждой задачи указана фамилия её автора.

Компьютерный макет: А. И. Голованов.

Желаем успешной работы!

Авторы и составители сборника

Условия и решения задач

9 класс

9.5. В детском саду воспитательница взяла $n > 1$ одинаковых картонных прямоугольников и раздала их n детям, каждому по прямоугольнику. Каждый ребёнок разрезал свой прямоугольник на несколько одинаковых квадратиков (квадратики у разных детей могли быть разными). Оказалось, что общее количество квадратиков — простое число. Докажите, что исходные прямоугольники были квадратами. (*С. Берлов*)

Решение. Предположим противное: пусть прямоугольники имели размеры $k \times \ell$, где $\ell < k$. Пусть a_i — длина стороны квадрата у i-го ребёнка. Тогда каждая сторона прямоугольника составлена из нескольких отрезков длиной a_i, то есть $\ell = b_i a_i$ и $k = c_i a_i$, где b_i и c_i — натуральные числа. При этом у ребёнка получилось $b_i c_i$ квадратиков.

Заметим, что $1 < k/\ell = c_i/b_i$, то есть число k/ℓ рационально. Пусть s/t — его несократимая запись; тогда $s > 1$, и c_i делится на s при всех i. Значит, и число квадратиков у i-го ребёнка делится на s. Тогда общее число квадратиков Q также делится на $s > 1$, и притом $Q > s$ (поскольку количество детей больше 1). Значит, Q — составное число; противоречие.

9.6. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC с основанием BC взята точка D. На меньшей дуге CD окружности, описанной около треугольника BCD, выбрана точка K. Луч CK пересекает прямую, параллельную BC и проходящую через A, в точке T. Пусть M — середина отрезка DT. Докажите, что $\angle AKT = \angle CAM$. (*А. Кузнецов*)

Решение. Продлим отрезок AM на его длину за точку M, получим точку N такую, что $ADNT$ — параллелограмм. Поскольку $\angle ANT = \angle CAM$, для решения задачи достаточно показать, что $\angle AKT = \angle ANT$, или что точки A, T, N, K лежат на одной окружности (см. рис. 1).

Пусть ND пересекает AB в точке S; тогда $DS \parallel BC$, и

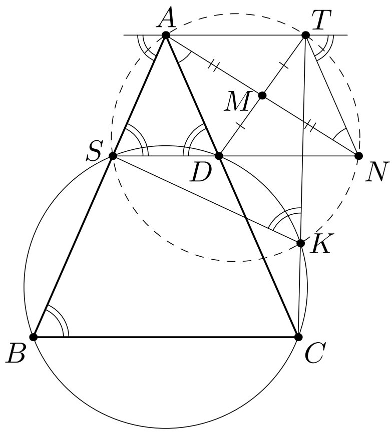

Рис. 1

$BSDC$ — равнобокая трапеция. Мы докажем, что точки K и N лежат на окружности ω, описанной около треугольника AST.

Имеем $\angle ATN = \angle ADN = 180^\circ - \angle SDA = 180^\circ - \angle ASD$, значит, N лежит на окружности ω. Из окружности, описанной около трапеции $BSDC$, имеем $\angle SKT = \angle SBC = 180^\circ - \angle SAT$, поэтому K лежит на окружности ω, что и требовалось доказать.

9.7. Среди 16 монет есть 8 *тяжёлых* — весом по 11 г, и 8 *лёгких* — весом по 10 г, но неизвестно, какие из монет какого веса. Одна из монет — юбилейная. Как за три взвешивания на двухчашечных весах без гирь узнать, является юбилейная монета тяжёлой или лёгкой? (*К. Кноп*)

Решение. Обозначим юбилейную монету через Ю. Отложим две неюбилейных монеты A и B, и разложим оставшиеся 14 монет по 7 на каждую чашу так, чтобы Ю попала на левую. Назовём монету *левой* или *правой*, если в этом взвешивании она попала на левую или правую чашу, соответственно.

Случай (=). Пусть чаши оказались в равновесии.

В этом случае либо на каждой чаше по 3 тяжёлых монеты (и тогда A и B обе тяжёлые), либо по 4 (тогда A и B лёгкие). В любом случае обе отложенных монеты одинаковы. В этом случае возьмём с левой чаши Ю и ещё одну монету C и сравним эту пару с парой A и B.

Подслучай (=, =). Пусть снова получено равновесие.

Тогда все 4 монеты A, B, C, Ю весят одинаково. Сравним их с любыми другими четырьмя левыми монетами. Если весы окажутся в равновесии, то все 8 монет во взвешикании — одного веса. Тогда среди левых монет было 6 монет такого веса; это невозможно. Значит. какая-то чаша перевесит, и мы узнаем, являлись A, B, C и Ю тяжёлыми или лёгкими.

Подслучай $(=,<)$. Чаша, содержащая Ю во втором взвешивании, легче.

Тогда на этой чаше не может быть двух тяжёлых монет. Сравнив эти две монеты друг с другом, мы в случае неравенства сразу узнаём вес Ю, а в случае равенства сможем сделать вывод о том, что обе монеты на этой чаше — лёгкие.

Подслучай $(=,>)$, когда чаша с Ю тяжелее, аналогичен.

Случай $(<)$. Пусть левая чаша в первом взвешивании оказалась легче.

Тогда среди левых монет не более трёх тяжёлых. Сравнив Ю с какой-нибудь левой монетой C, мы либо узнаем вес Ю (в случае неравенства), либо найдём две одинаковых монеты (Ю и C). Сравнив эту пару с другой парой левых монет, мы опять же узнаем вес Ю в случае неравенства. В случае же равенства мы найдём 4 левых монеты одного веса, одна из которых — Ю. Как уже отмечалось, они могут быть только лёгкими.

Случай $(>)$, когда в первом взвешивании чаша с Ю тяжелее, аналогичен предыдущему.

9.8. Даны числа a, b, c, не меньшие 1. Докажите, что

$$\frac{a+b+c}{4} \geqslant \frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} + \frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} + \frac{\sqrt{ca-1}}{a+b}\,.$$

(*К. Тыщук*)

Решение. По неравенству о средних имеем $b+c \geqslant 2\sqrt{bc}$, откуда

$$4\,\frac{\sqrt{ab-1}}{b+c} \leqslant 2\sqrt{\frac{ab-1}{bc}} = 2\sqrt{\left(a-\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{1}{c}} \leqslant \left(a-\frac{1}{b}\right)+\frac{1}{c}\,,$$

где в последнем переходе опять применено неравенство о средних. Аналогично выводятся неравенства

$$4\,\frac{\sqrt{bc-1}}{c+a} \leqslant \left(b-\frac{1}{c}\right)+\frac{1}{a}\,, \quad 4\,\frac{\sqrt{ca-1}}{a+b} \leqslant \left(c-\frac{1}{a}\right)+\frac{1}{b}\,.$$

Складывая три полученных неравенства, получаем требуемое.

Замечание. Равенство достигается при $a = b = c = \sqrt{2}$.