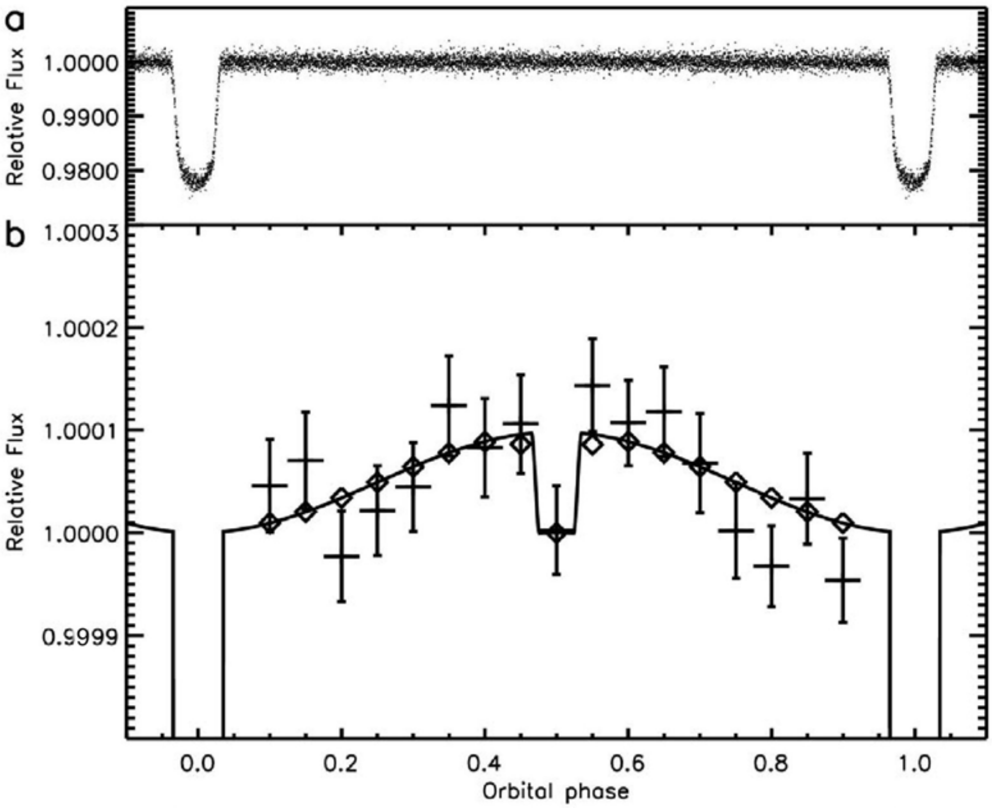
IX/X/XI.9 ЭКЗОАЛЬБЕДО

О.С. Угольников

9. Условие. На графике показано изменение видимой яркости затменной системы HD 189733 из звезды с планетой (статья Snellen I.A.G., de Mooij E.J.W., Albrecht S., Nature 459, 543, 2009) в двух масштабах. Виден как главный, так и вторичный минимум. Исходя из этого, оцените альбедо планеты и наклон ее орбиты к лучу зрения. Орбиту планеты считать круговой, потемнением звезды к краю пренебречь.

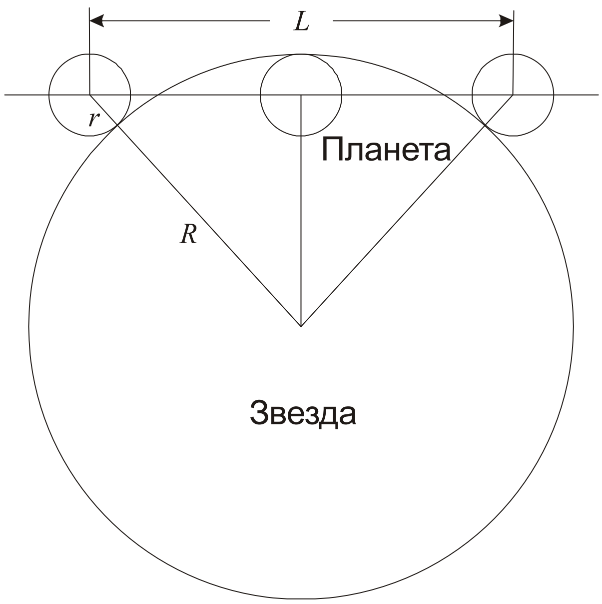


9. Решение. По нижнему графику мы видим, что в момент затмения звездой планеты (орбитальная фаза 0.5) общая звездная величина система такая же, как перед началом или после окончания главного минимума, когда планета имеет малую фазу и не отражает свет звезды. Из этого мы можем сделать вывод, что затмения в системе полные или близки к полным. В то же время, основной минимум практически не имеет плато, характерное для полной фазы (особенно, центральной). Поэтому, учитывая оценочный характер задачи, мы можем считать, что затмения в системе полные и касательные, то есть диски планеты и звезды во время середины затмения касаются друг друга изнутри.

Обозначим радиусы звезды и планеты как R и r. По верхнему графику мы видим, что потемнение в главном минимуме $\eta=\Delta J/J=0.023$. В пренебрежении потемнением диска звезды к краю имеем

$$\eta = \frac{r^2}{R^2}; \quad r = R\sqrt{\eta} = 0.15R.$$

Определим теперь, какой путь относительно звезды преодолевает планета во время основного затмения (с частными фазами). По рисунку мы видим, что этот путь составляет



$$L = 2\sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 4\sqrt{Rr} = 4R\eta^{1/4} \approx 1.6R.$$

По графику мы видим, что затмение охватывает интервал орбитальных фаз $\pm f$, где $f \approx 0.03$. Отношение этого интервала к полному орбитальному циклу (единичный интервал фаз) есть отношение пути L к длине круговой орбиты планеты:

$$2f = \frac{L}{2\pi a}.$$

Здесь a – радиус орбиты планеты, который мы можем выразить следующим образом:

$$a = \frac{L}{4\pi f} = \frac{R\eta^{1/4}}{\pi f} \approx 4R.$$

Полученное соотношение позволяет ответить на вопросы условия задачи. Исходя из касательного затмения, получаем оценку угла наклона плоскости орбиты к лучу зрения:

$$i = \arcsin\frac{R-r}{a} = \arcsin\frac{(1-\sqrt{\eta})\pi f}{\eta^{1/4}} = 12^{\circ}.$$

Обозначив светимость звезды через B, а сферическое альбедо планеты через A, запишем выражение для светимости планеты:

$$b = \frac{B}{4\pi a^2} \cdot A \cdot \pi r^2.$$

Для наибольшего правдоподобия будем считать, что планета отражает свет неравномерно, и в направлении звезды отражается вдвое больше света, чем в среднем по небесной сфере. Тогда видимая яркость звезды и планеты на Земле (на расстоянии D) будут равны

$$J = \frac{B}{4\pi D^2}; \quad j = \frac{b}{2\pi D^2} = B\frac{Ar^2}{2a^2}.$$

По графику мы видим, что отношение κ=j/J составляет 10^{-4}. Мы получаем оценку альбедо планеты:

$$A = \frac{2\kappa a^2}{r^2} = \frac{2\kappa}{\pi^2 f^2 \sqrt{\eta}} = 0.15.$$

Предположение равномерного отражения света планетой во все стороны приведет нас к вдвое большему значению альбедо - около 0.3.

Отметим, что реальное альбедо планеты, в соответствии с данными упомянутой в условии статьи, составляет 0.20 или менее. Также звезда характеризуется заметным потемнением диска к краю, которое замывает эффект плато на кривой блеска, возникающее при полном вступлении планеты на диск звезды. В решении задачи мы это не учитывали, поэтому получили несколько больший угол наклона орбиты к лучу зрения (12°), чем на самом деле (около 5°).

9. Система оценивания.

Этап 1 - 4 балла: Обоснованный вывод о характере затмений.
Участники олимпиады должны установить, что затмения в системе полные и касательные (точнее говоря, близки к таковым с учетом точности предоставленных данных). Однако сам по себе такой вывод без обоснований оценивается только в 1 балл. Для получения полной оценки участники должны указать два экспериментальных факта - отсутствие "плато" у главного минимума и сходство блеска при вторичном затмении и вблизи первичного минимума. Если их этих двух фактов указан только один (любой), то оценка за первый этап составляет 2 балла.

В случае вывода о полном затмении (без указания на касание) первый этап не засчитывается (0 баллов). Если же делается вывод о том, что затмение близко к касательному, но может быть как полным, так и частным (вследствие низкой точности измерения вторичного минимума), то при наличии обоснований и двух экспериментальных фактов этап засчитывается полностью.

Этап 2 - 1 балл. Определение соотношения радиусов планеты и звезды.
Этап засчитывается при значениях отношения радиусов от 0.14 до 0.16. Участник может считать, что затмение могло быть частным (с большой фазой), и тогда полученное значение есть оценка снизу. Это соответствует действительности, и в таком случае этап также засчитывается.

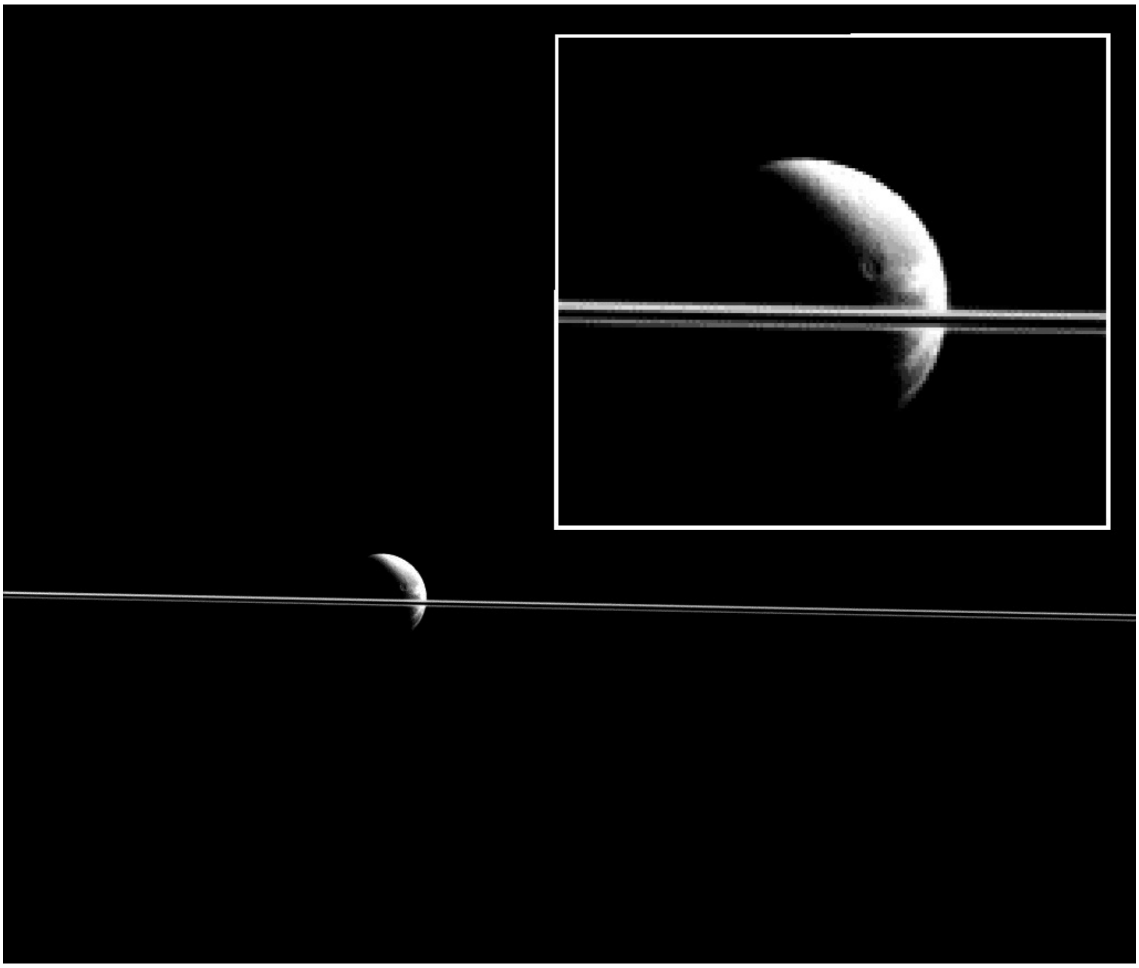
Этап 3 - 2 балла. Определение соотношения размеров звезды (или планеты) и радиуса орбиты планеты.
Правильными могут считаться величины от a=3.5R до a=4.5R. Опять же, это может быть указано, как оценка снизу. Если при этом делается предположение, что затмения центральные, то участник получает L=2R и далее a~5R. В этом случае этап также засчитывается.

Этап 4 - 2 балла. Вычисление наклонения орбиты.
Ответ (i=0), соответствующий центральным затмениям, не оценивается. Также не оцениваются ответы с углами наклона орбиты к лучу зрения, больше 20°, так как в этом случае затмения бы не наблюдались. 2 балла выставляется при диапазоне углов от 10° до 15°, при условии правильного построения метода и учета касательного характера затмений. Жюри необходимо обратить внимание, что вместо угла наклона к лучу зрения участники могут определять угол наклона к картинной плоскости (дополнение до 90°), что также оценивается.

Этап 5 - 3 балла. Вычисление альбедо планеты.
При вычислении альбедо участник может предполагать как равномерное, так и неравномерное отражение света планетой во все стороны. Ошибка, связанная с неправильным учетом касательного характера затмения, на оценку за определение альбедо не влияет.

Возможное неверное решение: альбедо планеты находится как отношение ее видимой яркости (0.0001 от яркости звезды) и закрытого участка звезды во время прохождения планеты (0.023 от яркости звезды). В этом случае альбедо получается равным около 0.5%. Эта величина может быть еще умножена на 2π или 4π, что не меняет оценку. Оценка составляет 0 баллов за все решение, если нет корректного вычисления угла наклона орбиты. Если же он найден, то оценка определяется степенью выполнения первых четырех этапов решения.

7. Условие. Перед Вами снимок колец Сатурна и его спутника Дионы, сделанный автоматической межпланетной станцией «Кассини» 25 декабря 2015 года, находившейся тогда в плоскости колец Сатурна. Северный полюс мира для Сатурна находится сверху от фото. Известно, что вскоре после этого на Сатурне произошло летнее солнцестояние. Определите его дату. Орбиту Сатурна считайте круговой. Оцените точность полученного результата.



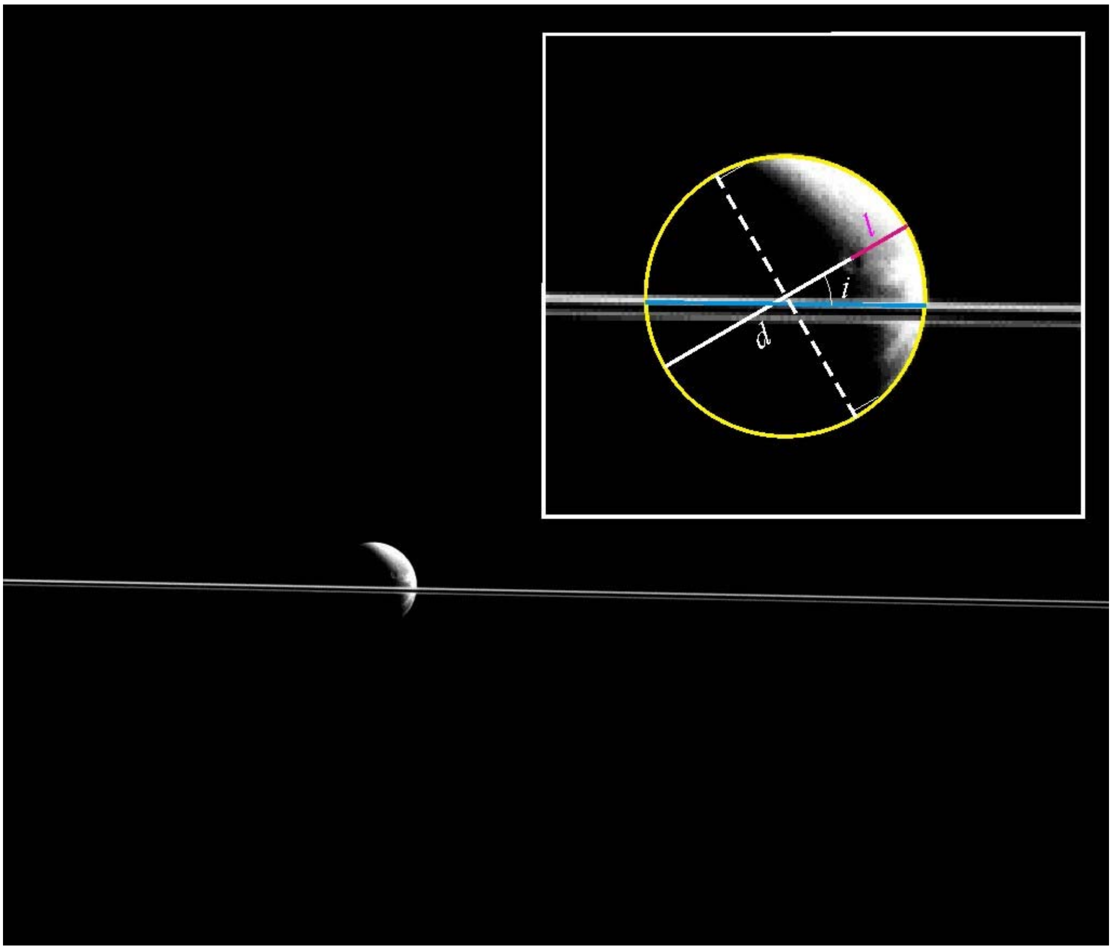
7. Решение. Как известно, кольца Сатурна находятся в плоскости его экватора. Поэтому по фазе Дионы и наклону ее серпа к плоскости колец можно определить склонение Солнца в сатурнианской экваториальной системе координат. Фаза Дионы равна отношению толщины серпа к диаметру спутника:

$$F = \frac{l}{d} = 0.23.$$

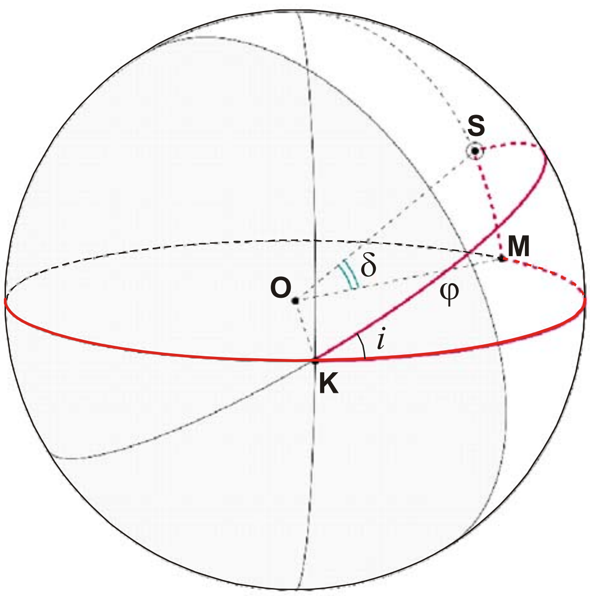
Фазовый угол равен

$$\varphi = \arccos\,(2F - 1) = 123°.$$

Непосредственным измерениями можно получить, что серп Дионы отклонен от перпендикуляра к плоскости колец Сатурна на угол $i = 31°$.



Рассмотрим небесную сферу, в центре которой находится Диона. Для простоты будем считать, что Диона находится в точности в плоскости колец Сатурна, поэтому экватор нашей сферы будет соответствовать экватору в сатурнианской системе координат. Отметим на экваторе точку **K**, соответствующую направлению на станцию «Кассини», и точку **S** выше экватора, соответствующую направлению на Солнце. Линия, опущенная из точки **S** перпендикулярно экватору, пересекает его в точке **M**.



Рассмотрим сферический треугольник **MSK**. Нас интересует дуга **SM**, которая по определению равна искомому склонению Солнца δ. При этом длина дуги **SK** есть не что иное, как величина фазового угла φ. Также нетрудно догадаться, что угол **K** равен углу наклона серпа *i*. Учитывая, что угол **M** равен 90°, из теоремы синусов получаем:

$$\delta = \arcsin(\sin\varphi \cdot \sin i) = 25.6°.$$

Склонение Солнца на Сатурне меняется по закону, близкому к синусоидальному, с амплитудой ε = 26.73° и периодом T = 29.46 лет:

$$\delta = \varepsilon \sin\left(\frac{2\pi \cdot t}{T}\right),$$

где t – время, прошедшее с момента весеннего равноденствия. По условию, фотография сделана незадолго до летнего солнцестояния. Доля сатурнианского года, прошедшая с момента весеннего равноденствия, равна

$$\mu = \frac{t}{T} = \frac{1}{2\pi}\arcsin\left(\frac{\delta}{\varepsilon}\right) \approx 0.20.$$

До летнего солнцестояния осталось 0.25 – μ = 0.05 сатурнианского года или 1.5 земных года. Таким образом, летнее солнцестояние произошло примерно в середине 2017 года (точная дата солнцестояния – 26 мая 2017 года).

Оценим погрешность полученного результата. Точность измерения фазы по фотографии зависит от качества печати и масштаба изображения, и, по-видимому, составляет около 0.02. Точность измерения угла наклона терминатора примем равной цене деления транспортира, 1°.

Теперь рассчитаем ответ для двух экстремальных наборов измерений (F=0.21, i=30° и F=0.24, i=32°). В первом случае мы получаем δ=24.0° и t = 2.1 года, а для второго случая мы имеем δ=27.3°>ε. Отсюда можно сделать вывод, что точность определения промежутка времени не лучше 0.5-1 года, и при неаккуратных измерениях ответ может не быть получен. Ситуацию осложняет то, фотография сделана близко к солнцестоянию, когда склонение Солнца изменяется медленно, что увеличивает влияние погрешностей измерений на итоговый результат.

7. Система оценивания. Решение задания разбивается на несколько этапов. Первые два этапа связаны с измерением фазы Дионы и наклона направления ее серпа к плоскости колец Сатурна.

Этап 1 - 1 балл. Измерение фазы Дионы.
Этап засчитывается при результате измерений от 0.21 до 0.25. При результате от 0.19 и 0.21 и от 0.25 до 0.27 может быть поставлено 0.5 балла, которые учитываются при дальнейшем определении оценки.

Этап 2 - 1 балл. Измерение угла наклона направления серпа Дионы к плоскости колец Сатурна.
Аналогично, измерение угла наклона оценивается в 1 балл, если оно дает результат от 30° до 32° и в условные 0.5 балла при результатах от 29° до 30° и от 32° до 33°. Если при суммировании оценок за первые два этапа получается дробная величина, она округляется в пользу участника олимпиады. Погрешность в вычислении фазы и угла наклона не влияет на

оценку за следующие этапы решений, если только они не ведут к заведомо абсурдному ответу (например, $\delta>\varepsilon$, см. далее).

Этап 3 - 1 балл. Вычисление фазового угла Дионы.
Вместо этого угла может быть определено его дополнение до 180°, что должно быть корректно описано). Балл выставляется в случае правильной формулы и правильного численного значения, определяемого измеренной фазой.

Этап 4 - 3 балла. Вычисление склонения Солнца.
Этап распределяется на три составляющий (рисунок или правильное представление картины – 1 балл, применение теоремы синусов – 1 балл, ответ – 1 балл). Получение ответа $\delta>\varepsilon$ как следствие погрешности измерений не является основанием для снижения оценок, если это правильно интерпретируется и анализируется. Если же этот ответ далее используется как адекватный, оценка ***за все решение задачи*** обнуляется.

При выполнении первых четырех этапов участник олимпиады может исходить из того, что угол наклона серпа и есть склонение Солнца. Это неверно, так как Диона располагается не в 90° от Солнца. При таком предположении суммарная оценка за все четыре этапа не превышает 1 балл.

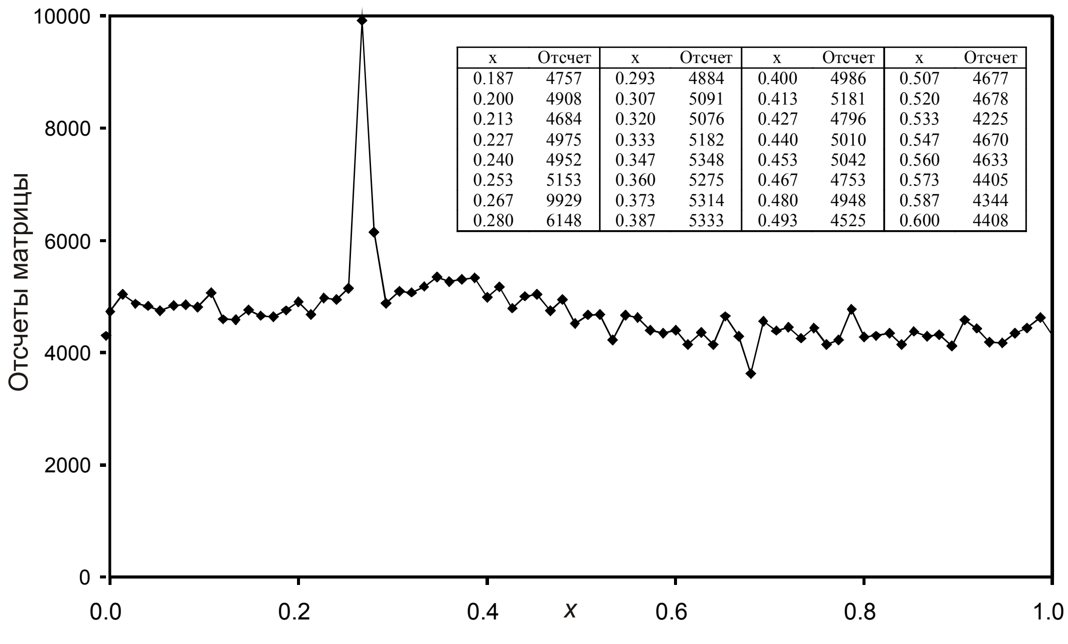
Этап 5 - 4 балла. Вычисление времени, оставшегося до солнцестояния.
2 балла выставляется за верный принцип вычисления времени, и 2 балла – за ответ в интервале от 0 до 2.5 лет. Этот этап также засчитывается в том случае, если участник получил величину склонения Солнца $\delta>\varepsilon$, интерпретировал это как следствие погрешности расчетов и сделал вывод, что искомое время близко к нулю. Если же таких выводов не делается, то в случае $\delta>\varepsilon$ данный этап не засчитывается. Этап и ***все решение*** не засчитывается, если искомое время оказывается большим, чем 0.25 от орбитального периода Сатурна (около 7 лет).

Этап 6 - 2 балла. Оценка точности.
Этап можно производить разными способами. За этот этап выставляется 2 балла – 1 балл при правильных подходах к оценке точности и 1 балл при правильном выводе (точность не лучше 0.5 года).

XI.8 ПОЛЯРНЫЙ ПОТОК

О.С. Угольников

8. Условие. Перед Вами фото звездного неба, сделанное широкоугольной камерой 13 октября 2018 года в средней полосе России, экспозиция составляет 24.3 секунды. На нем запечатлен яркий метеор, пролетевший на небе мимо звезды Вега (α=18.5ч, δ=+39°, блеск 0.0^m), вспышка метеора завершилась вблизи положения звезды. Возможно, метеор принадлежит малоизвестному потоку Октябрьские Камелопардалиды с радиантом вблизи северного полюса мира и геоцентрической скоростью 47 км/с. Исходя из этого, определите звездную величину метеора в пике его яркости, а также массу метеорного тела, считая, что в излучение перешел 1% его кинетической энергии. Правое фото идентично левому, на нем сделаны необходимые обозначения, красный крест показывает положение зенита. При решении вы можете воспользоваться фотометрическим срезом кадра вдоль узкой полосы, показанной на правом фото, в графическом и табличном варианте. Считать, что метеор вспыхнул на высоте 100 км, уменьшением его скорости в атмосфере пренебречь.

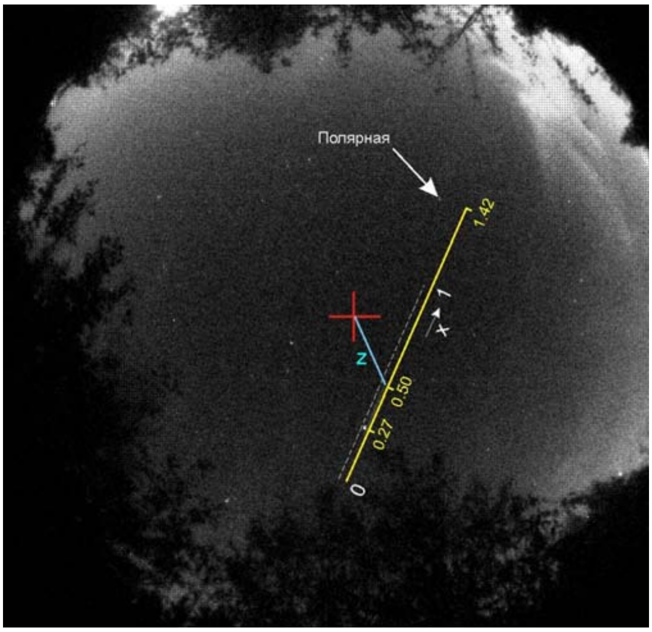


x	Отсчет	x	Отсчет	x	Отсчет	x	Отсчет
0.187	4757	0.293	4884	0.400	4986	0.507	4677
0.200	4908	0.307	5091	0.413	5181	0.520	4678
0.213	4684	0.320	5076	0.427	4796	0.533	4225
0.227	4975	0.333	5182	0.440	5010	0.547	4670
0.240	4952	0.347	5348	0.453	5042	0.560	4633
0.253	5153	0.360	5275	0.467	4753	0.573	4405
0.267	9929	0.373	5314	0.480	4948	0.587	4344
0.280	6148	0.387	5333	0.493	4525	0.600	4408

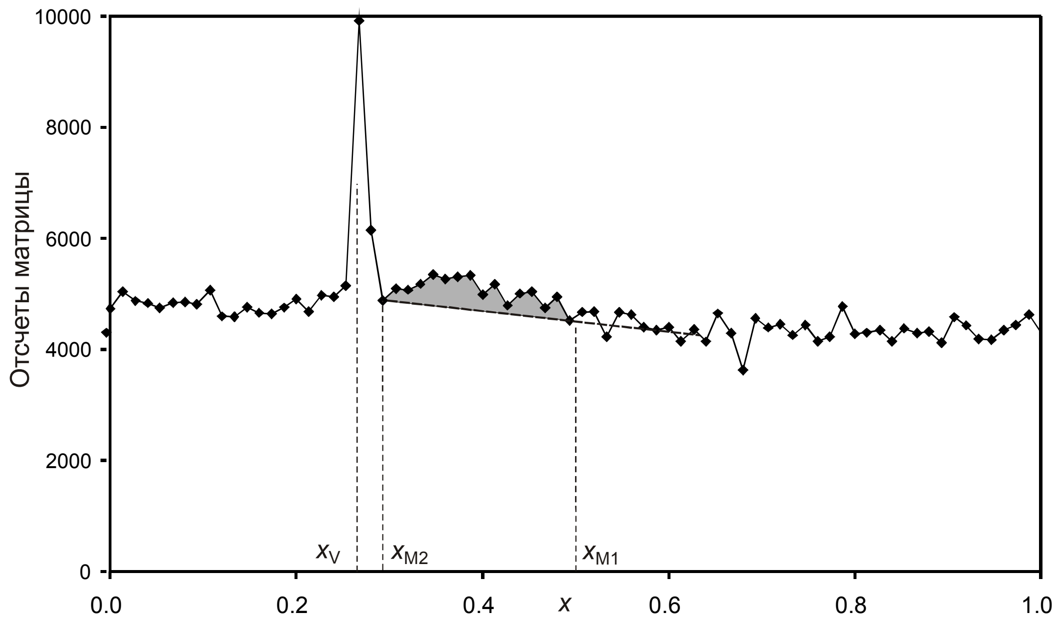
8. Решение. Для начала откалибруем снимок. Как видно по графику и таблице, звезда Вега изменила сигнал в трех точках (главной и двух соседних), при характерном фоне около 4900. То есть, звезда Вега с блеском 0m за время T=24.3 секунды дала

$$S = (5153 + 9929 + 6148) - (3*4900) = 6530 \text{ отсчетов матрицы.}$$

За одну секунду от звезды $m_V=0^m$ мы имеем $S_0 = S/T \approx 270$ отсчетов матрицы. Если отвлечься от атмосферного поглощения света (которое примерно одинаково для Веги и метеора), то полученное число является абсолютной характеристикой чувствительности прибора, которую мы далее используем при решении задачи.



Наиболее яркая часть метеора занимает область с координатами от 0.27 до 0.50 (см. рисунок), но малый участок с координатами от 0.27 до 0.29 засвечен звездой. Рассмотрим часть, начинающуюся на координате x_{M1}=0.50 и заканчивающуюся вблизи Веги (x_{M2}=0.29). Высота над горизонтом и, как следствие, фон неба в этом районе непостоянны, фон возрастает от 4500 в начале пути метеора до 4900 около Веги. Считая его изменение линейным и просуммировав разность отсчета и фона в 16 точках между значениями x в 0.29 и 0.50 (вторая и третья колонки таблицы), мы получаем суммарный эффект от метеора, зафиксированный матрицей I: около 5500 отсчетов. По этому показателю метеор схож с Вегой, но не стоит забывать, что полет метеора длился лишь малую часть экспозиции, и в это время он был существенно ярче Веги. Для нахождения его звездной величины нужно определить длительность.



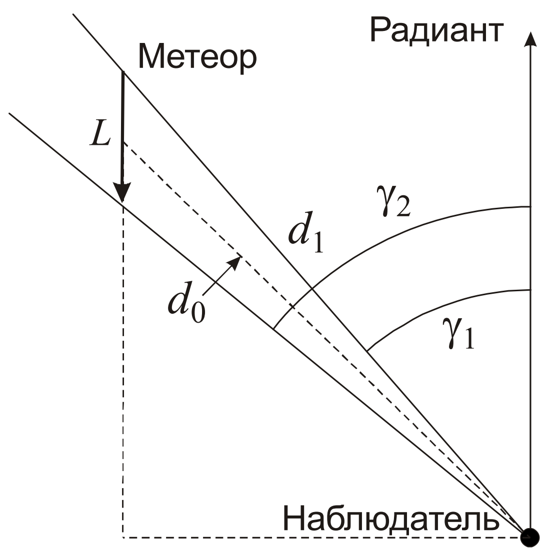
Нам известно, что радиант потока, к которому принадлежал метеор, находится вблизи Северного полюса мира, хотя его точные координаты не заданы. Продолжим линию метеора в сторону Полярной звезды и будем считать, что радиант находится в точке этой линии, ближайшей к Полярной, она соответствует координате x_P=1.42. Мы можем считать, что угловое расстояние от Веги до этой точки такое же, как и до полюса мира, и равно

$$\gamma_S = 90° - \delta = 51°.$$

Считая масштаб изображения постоянным, мы можем теперь найти угловые расстояния начала и конца измеряемой яркой части метеора от радианта:

$$\gamma_1 = \gamma_S \frac{x_P - x_{M1}}{x_P - x_V} = 41^O; \quad \gamma_2 = \gamma_S \frac{x_P - x_{M2}}{x_P - x_V} = 50^O.$$

Мы можем также найти расстояние до точки возгорания метеора. Для этого вспомним, что оно произошло на высоте h=100 км. По снимку мы можем определить зенитное расстояние точки возгорания: z=16°. Расстояние до точки возгорания равно



$$d_1 = h / \cos z = 104 \text{ км} \sim h.$$

Длину пути метеора можно найти из теоремы синусов:

$$L = d_1 \frac{\sin(\gamma_2 - \gamma_1)}{\sin(180^O - \gamma_2)} = 21 \text{ км}.$$

Его длительность тогда равна

$$t = L / v = 0.45 \text{ с}.$$

Здесь v – скорость метеора. За единицу времени метеор дал бы число отсчетов $I_0 = I/t \approx 12000$. Теперь мы можем определить его среднюю звездную величину:

$$m = m_V - 2.5 \lg (I_0/S_0) = m_V - 2.5 \lg (I\,T\,/\,S\,t) \approx -4.$$

Пиковая звездная величина будет еще примерно на 1^m ярче, т.е. около -5^m. В дальнейших вычислениях нам потребуется суммарная величина свечения метеора, поэтому будем опираться на среднее значение -4^m. Известно, что от Солнца со звездной величиной m_0=–26.8 на квадратный метр площади вблизи Земли в единицу времени приходит энергия F_0=1360 Дж/м^{2}с. От метеора за такое же время на такую же площадь, перпендикулярную направлению на него, придет энергия

$$F_M = F \cdot 10^{0.4(m_0 - m)} = 10^{-6} \text{ Дж/м}^2\text{с}.$$

За все время полета метеора мы зафиксируем энергию с единичной площадки

$$J_M = F_M \cdot t = 4.5 \cdot 10^{-7} \text{ Дж/м}^2.$$

Учитывая оценочный характер задания, мы можем считать характерное расстояние до метеора d_0 просто равным d_1. Можно оценить его точней, связав с его с серединой видимого пути метеора. Из треугольника, изображенного на рисунке пунктирными линиями, имеем:

$$d_0 = d_1 \frac{\sin\gamma_1}{\sin((\gamma_1 + \gamma_2)/2)} = 96 \text{ км}.$$

Можно также считать расстояние до метеора, соответствующее его пространственной середине, значение будет практически таким же. Теперь определим полную энергию его излучения:

$$E_M = J_M \cdot 4\pi d_0^2 \approx 5 \cdot 10^4 \text{ Дж}.$$

Учитывая, что в излучение перешло η=0.01 от полной кинетической энергии, находим массу метеорного тела:

$$M = \frac{2E_M}{\eta v^2} \approx 5 \text{ г}.$$

8. Система оценивания. Решение задания разделяется на несколько этапов, которые могут выполняться в произвольном порядке и оцениваются независимо:

Этап 1 - 1 балл: Определение отклика матрицы от звезды Вега.
Его можно сразу же нормировать на единичную экспозицию, как сделано выше, можно этого не делать, но в этом случае необходимо правильно учесть фактор экспозиции при дальнейшем сравнении метеора с Вегой, обязательно корректно учесть фон матрицы. Допустимая точность - 10%. При больших ошибках этап не засчитывается, но последующие оцениваются в полной мере. Этап не засчитывается, если вместо Веги в качестве калибровочного источника используется фон матрицы, так как он не совпадает с фоном неба, и сам этот фон для данных условий неизвестен.

Этап 2 - 2 балла: Определение суммарного отклика матрицы от метеора.
Участники могут использовать только его яркую часть, что существенно облегчает дальнейшее выполнение задания. Можно учитывать весь путь метеора, включая его слабый участок после Веги. Это не является ошибкой, но требует аккуратного учета попадания света

от Веги на этот участок, а также существенной переменности яркости при определении максимальной звездной величины метеора. При учете фона необходимо учитывать его изменение с положением точки (иначе оценка за 2 этап составляет не более 1 балла), допустимая ошибка итоговой величины на 30-40%. При больших ошибках данный этап не засчитывается, но последующие оцениваются в полной мере.

Этап 3 - 6 баллов: Определение звездной величины метеора с учетом длительности его полета.

Это основная часть решения. Если звездная величина определяется из прямого сравнения сигналов метеора и Веги без учета фактора экспозиции - все 6 баллов не выставляются, но последующие этапы оцениваются в полной мере. Также этап не засчитывается, если метеор по любой причине не оказывается существенно ярче Веги (звездная величина не ярче -0.5m). Если в качестве максимальной звездной величины метеора берется средняя величина по яркому участку (-4m без учета возможных ошибок измерений) - оценка за этап уменьшается до 5 баллов, если берется средняя величина за весь путь метеора (около -3m) - оценка уменьшается до 4 баллов. При этом допускается ошибка в 1^m, вызванная неточным выполнением предыдущего этапа, оценка при этом не снижается.

При выполнении этого этапа участник может предположить, что движение метеора происходило перпендикулярно направлению к наблюдателю, и далее, найдя угловую длину его наиболее яркой части (9°), определить длину пути (100 км· sin 9° = 15 км) и продолжительность (15 км / 47 км/с = 0.3 с). Численная ошибка в этом случае составляет 1.5 раза, однако оценка за выполнение этапа уменьшается до 2 баллов без влияния на последующие этапы.

Этап 4 - 3 балла. Определение массы метеорного тела.

Этап можно производить через вычисление энергии от метеора через единичную площадку на Земле, возможно построение иных схем (например, формальное определение абсолютной звездной величины метеора). В качестве объекта сравнения удобно выбирать Солнце, однако участники могут использовать и другие объекты. Допустимая точность - 20%, если погрешность вызвана ошибками фотометрии в начале решения.

Вероятная ошибка при решении: не учитывается фон матрицы, что удваивает яркость Веги и резко усиливает яркость метеора. Оценка за первые три этапа составляет 0 баллов, четвертый оценивается в зависимости от правильности его выполнения.

Вероятная ошибка при решении: в качестве среднего расстояния до метеора берется расстояние до начала и конца его пути. Хотя ошибка составит около 10%, оценка за этап уменьшается на 1 балл.

Вероятная ошибка при решении: потеря множителя t в вычислении энергии метеора (его длительность отличается от 1 секунды). Это приводит к ошибке в 2 раза, оценка за 3 этап - не более 1 балла.