# 10 класс

10.1. Найдите количество корней уравнения

$$|x| + |x+1| + \ldots + |x+2018| = x^2 + 2018x - 2019.$$

(*В. Дубинская*)

**Ответ.** 2.

**Решение.** При $x \in (-2019, 1)$ корней нет, так как на указанном интервале левая часть неотрицательна, а правая — отрицательна.

При $x \in [1, \infty)$ все модули раскрываются со знаком «+», поэтому уравнение примет вид $g(x) = 0$, где $g(x) = x^2 - x - 2009 + (1 + 2 + \ldots + 2018)$. Поскольку $g(1) < 0$, это квадратное уравнение имеет единственный корень на промежутке $[1, \infty)$.

Поскольку графики функций в левой и правой части симметричны относительно прямой $x = -1009$ (т.е. $f(x) = f(-2018 - x)$), то на промежутке $(-\infty, -2019]$ столько же корней, сколько и на промежутке $[1, +\infty)$, т. е. ровно один корень. Итого, у данного уравнения два корня.

10.2. Дан остроугольный треугольник $ABC$, в котором $AB < AC$. Пусть $M$ и $N$ — середины сторон $AB$ и $AC$ соответственно, а $D$ — основание высоты, проведённой из $A$. На отрезке $MN$ нашлась точка $K$ такая, что $BK = CK$. Луч $KD$ пересекает окружность $\Omega$, описанную около треугольника $ABC$, в точке $Q$. Докажите, что точки $C$, $N$, $K$ и $Q$ лежат на одной окружности.

(*К. Иванов*)

**Решение.** Пусть $\ell$ — серединный перпендикуляр к $BC$. Заметим, что $\ell$ проходит через $K$. Пусть точка $A'$ симметрична точке $A$ относительно $\ell$. Очевидно, $A'$ лежит на $\Omega$, причём из симметрии дуги $AB$ и $A'C$ равны.

Так как точка $D$ симметрична точке $A$ относительно прямой $MN$, то $D$ и $A'$ симметричны относительно $K$. Это означает, в частности, что $D$, $K$ и $A'$ лежат на одной прямой, то есть прямая $QD$ проходит через $A'$. Тогда $\angle KQC = \angle A'QC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{A'C} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AB} = \angle ACB$. Поскольку $MN \parallel BC$, имеем $\angle ACB = \angle ANK$. Отсюда $\angle KQC = \angle ANK$, то есть четырёхугольник $CNKQ$ — вписанный.

**Замечание.** Разумеется, точки $B$, $M$, $K$ и $Q$ также лежат на одной окружности.

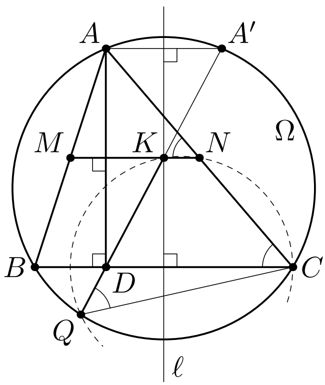


Рис. 10

10.3. Дано натуральное число $k$. На клетчатой плоскости изначально отмечено $N$ клеток. Назовём *крестом* клетки $A$ множество всех клеток, находящихся в одной вертикали или горизонтали с $A$. Если в кресте неотмеченной клетки $A$ отмечено хотя бы $k$ других клеток, то клетку $A$ также можно отметить. Оказалось, что цепочкой таких действий можно отметить любую клетку плоскости. При каком наименьшем $N$ это могло случиться? (*Г. Челноков*)

**Ответ.** $N = \left[\frac{k+1}{2}\right] \cdot \left[\frac{k+2}{2}\right] = \begin{cases} m(m+1), & \text{если } k = 2m; \\ m^2, & \text{если } k = 2m-1 \end{cases}.$

**Решение.** Обозначим через $N(k)$ ответ в задаче; положим $f(k) = \left[\frac{k+1}{2}\right] \cdot \left[\frac{k+2}{2}\right]$. Докажем сначала, что

$$N(k) \geqslant N(k-1) + \left[\frac{k+1}{2}\right] \quad \text{при } k \geqslant 2. \qquad (*)$$

После отмечания исходных $N(k)$ клеток можно отметить хотя бы одну клетку $A$; это значит, что либо в столбце, либо в строке этой клетки уже отмечено $\left[\frac{k+1}{2}\right]$ других клеток — пусть для определённости в строке $\ell$.

Мысленно отметим все клетки строки $\ell$. Ясно, что любую клетку по-прежнему можно отметить. Удалим из клетчатой плоскости строку $\ell$ и сдвинем вместе две получившиеся полуплоскости так, чтобы снова получилась клетчатая плоскость. Теперь мы можем отметить любую клетку этой новой плоскости, отмечая на каждом шагу клетку, в кресте которой уже есть не менее $k-1$ отмеченных клеток (поскольку из этого креста удалена одна клетка строки $\ell$). Следовательно, изначально на этой плоскости должно было быть отмечено не менее $N(k-1)$ клеток. Значит, на исходной плоскости сначала должно быть хотя бы $N(k-1)$ отмеченных клеток не из $\ell$; отсюда и следует $(*)$.

Поскольку $N(1)=1$, из доказанного неравенства $(*)$ следует, что

$$N(k) \geqslant \underbrace{1+1+2+2+3+3+4+\ldots}_{k \text{ слагаемых}} = f(k).$$

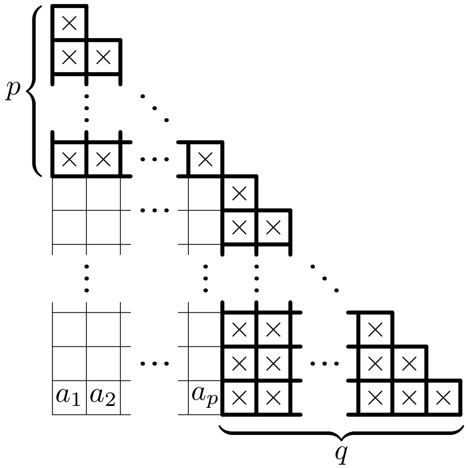


Рис. 11

Осталось показать, как отметить $f(k)$ клеток так, чтобы затем можно было отметить любую другую клетку плоскости. Покажем по индукции, что подходит пример, показанный на рис. 11, состоящий из двух «лесенок» высот $p = \left[\frac{k}{2}\right]$ и $q = \left[\frac{k+1}{2}\right]$; нетрудно понять, что в нём как раз $f(k)$ клеток. При $k=1$ утверждение очевидно: при одной отмеченной клетке можно отметить любую клетку в её кресте, а затем и любую клетку вообще.

Для перехода индукции заметим, что можно последовательно отметить клетки $a_1, a_2, \ldots, a_p$. После этого в строке, в которой они стоят, окажется $p+q=k$ клеток, и в ней уже можно будет отметить любую клетку. Значит, можно, вычеркнув эту строку, уменьшить значение $k$ на 1 и применить предположение индукции в оставшейся плоскости.

10.4. Изначально на доске записано натуральное число. Затем каждую секунду к текущему числу прибавляют произведение всех его ненулевых цифр. Докажите, что найдётся натуральное $a$ такое, что прибавление числа $a$ случится бесконечное количество раз.

(*Д. Крачун*)

**Решение.** Заметим, что $9^{100} < 10^{99}$, так как $\left(1+\frac{1}{9}\right)^{100} \geqslant$ $\geqslant 1 + \frac{100}{9} > 10$ по неравенству Бернулли. Тогда индукцией по $m$ легко получить, что

$$9^m < 10^{m-1} \quad \text{при } m \geqslant 100. \qquad (*)$$

Будем обозначать через $p(d)$ произведение всех ненулевых цифр числа $d$.

Рассмотрим момент, когда на доске впервые появилось число $B$, не меньшее $\underbrace{11\ldots1}_{n+1}$ при некотором $n > 200$. Пусть это число получилось из числа $A$. Так как $p(A) \leqslant 9^n < 10^{n-1}$, то $A > B - 10^{n-1} > 10^n$. Пусть $A$ начинается с $k$ единиц, тогда сразу за ними идёт 0, то есть $\underbrace{11\ldots1}_{k}\underbrace{0\ldots0}_{n-k+1} \leqslant A \leqslant \underbrace{11\ldots1}_{k}0\underbrace{9\ldots9}_{n-k}$. Произведение ненулевых цифр такого числа не превосходит $9^{n-k}$; с другой стороны, $A + p(A) \geqslant \underbrace{11\ldots1}_{n+1}$, откуда

$$p(A) \geqslant \underbrace{11\ldots1}_{n+1} - \underbrace{11\ldots1}_{k}0\underbrace{9\ldots9}_{n-k} > \underbrace{11\ldots1}_{n-k}.$$

Таким образом, $9^{n-k} \geqslant p(A) > \underbrace{11\ldots1}_{n-k} > 10^{n-k-1}$; согласно $(*)$, из этого следует, что $n-k \leqslant 99$, и тогда $p(A) \leqslant 9^{99}$.

Итак, найдётся бесконечное количество моментов, когда будет прибавляться число, не превосходящее $9^{99}$. Значит, какое-то из таких чисел будет прибавляться бесконечное число раз.

**Замечание.** На самом деле, неравенство $(*)$ верно при $m \geqslant$ $\geqslant 22$.

10.5. В таблицу $10 \times 10$ записаны положительные числа так, что в любой строке числа образуют арифметическую прогрессию (в порядке следования слева направо), а в любом столбце — геометрическую прогрессию (в порядке следования сверху вниз). Докажите, что знаменатели всех этих геометрических прогрессий равны. (*П. Кожевников*)

**Решение.** Достаточно решить задачу для квадрата $3 \times 3$. Отсюда будет следовать, что знаменатели прогрессий в любых двух соседних столбцах равны, а значит, они равны и во всех столбцах.

Из того, что в средней строке квадрата записана арифметическая прогрессия, а во всех столбцах — геометрические, следует, что расстановка выглядит как на рис. 12.

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{a-d}{p}$ | $\frac{a}{q}$ | $\frac{a+d}{r}$ |
| $a-d$ | $a$ | $a+d$ |
| $(a-d)p$ | $aq$ | $(a+d)r$ |

Рис. 12

Теперь из условия на остальные строки получаем

$$\frac{a-d}{p} + \frac{a+d}{r} = 2\,\frac{a}{q} \quad \text{и} \quad (a-d)p + (a+d)r = 2aq.$$

Положим $x = \frac{p}{q}$ и $y = \frac{r}{q}$. Тогда из равенств выше имеем

$$(a-d)y + (a+d)x = 2axy \quad \text{и} \quad (a-d)x + (a+d)y = 2a.$$

Складывая и сокращая на $2a$, получаем $x + y = xy + 1$, или $(x-1)(y-1) = 0$. Пусть, например, $x = 1$ (случай $y = 1$ аналогичен). Тогда $(a-d) + (a+d)y = 2a$, $(a+d)y = a+d$, откуда и $y = 1$. Итого, $p = q = r$, что и требовалось.

**Замечание.** Из университетского курса линейной алгебры известно, что если бы знаменатели прогрессий в столбцах были попарно различными, то столбцы образовывали бы *линейно независимую систему* (это — следствие формулы *определителя Вандермонда*); в частности, это означает, что строки не могут одновременно содержать арифметические прогрессии.

10.6. Даны натуральные числа $a$ и $b$. Докажите, что существует бесконечно много натуральных $n$ таких, что число $a^n+1$ **не** делится на $n^b+1$. (*А. Голованов*)

**Решение.** Назовём натуральное $n$ *плохим*, если $a^n+1$ не делится на $n^b+1$. Наша цель — доказать, что плохих чисел бесконечно много.

**Первое решение.** Докажем, что при любом чётном $n$ одно из чисел $n$ и $n^3$ плохое; из этого, очевидно, следует требуемое. Предположим противное. Тогда $a^n+1 \,\vdots\, n^b+1$ и $a^{n^3}+1 \,\vdots\, n^{3b}+1 \,\vdots\, n^b+1$. Иначе говоря, $a^n \equiv -1 \pmod{n^b+1}$ и $a^{n^3} \equiv -1$

$\pmod{n^b+1}$. Но отсюда следует, что $-1 \equiv a^{n^3} = (a^n)^{n^2} \equiv$
$\equiv (-1)^{n^2} \equiv 1 \pmod{n^b+1}$; это невозможно, ибо $n^b+1 > 2$. Противоречие.

**Замечание.** Аналогичное решение можно получить, показав, что среди чисел вида $2^k$ при нечётных $k$ не более одного неплохого. Действительно, если числа $2^k$ и $2^\ell$ при нечётных $k < \ell$ неплохи, то $a^{2^k}+1 \vdots 2^{kb}+1 \vdots 2^b+1$ и, аналогично, $a^{2^\ell}+1 \vdots 2^b+1$. Это невозможно, ибо $a^{2^\ell} \equiv (a^{2^k})^{2^{\ell-k}} \equiv 1 \pmod{2^b+1}$.

**Второе решение.** При $a = 1$ утверждение задачи очевидно, поэтому будем считать, что $a > 1$.

**Лемма.** *Пусть $a > 1$, $m$ и $n$ — натуральные числа. Предположим, что $a^n+1$ делится на $a^m+1$. Тогда $n$ делится на $m$.*

**Доказательство.** Пусть $r$ — остаток от деления $n$ на $m$, $n-r = qm$. Тогда $0 \equiv a^n+1 = a^{qm+r}+1 \equiv (-1)^q a^r+1 = \pm a^r+1$ $\pmod{a^m+1}$, то есть одно из чисел $a^r \pm 1$ делится на $a^m+1$. Но это невозможно при $r \neq 0$, ибо $0 < a^r \pm 1 < a^m+1$. □

Докажем, что существует бесконечно много плохих чисел вида $a^k$. Действительно, если $a^{a^k}+1$ делится на $a^{kb}+1$, то по лемме $a^k$ должно делиться на $kb$. Это невозможно, если, например, $k$ — простое число, большее $a$. Осталось заметить, что таких простых чисел бесконечно много.

**Третье решение.** Мы опять же исследуем лишь случай $a > 1$.

Пусть $p$ — некоторый простой делитель числа $(a(a-1))^b+1$. Положим $n_i = a(a-1)+ip$; тогда при любом $i$ имеем $n_i^b+1 \equiv$
$\equiv (a(a-1))^b+1 \equiv 0 \pmod p$, то есть $n_i^b+1$ делится на $p$.

С другой стороны, покажем, что числа $a^{n_i}+1$ и $a^{n_{i+1}}+1 =$
$= a^{n_i+p}+1$ не могут одновременно делиться на $p$. Действительно, иначе на $p$ делилась бы и их разность $a^{n_i}(a^p-1)$; но это невозможно, ибо $a^p-1 \equiv a-1 \pmod p$ по малой теореме Ферма, а числа $a$ и $a-1$ взаимно просты с $p$.

Итак, либо $a^{n_i}+1$ не делится на $p$ (и, значит, на $n_i^b+1$), либо $a^{n_{i+1}}+1$ не делится на $p$ (и, значит, на $n_{i+1}^b+1$). Поэтому среди чисел $n_1, n_2, \ldots$ бесконечно много плохих.

10.7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ углы $A$ и $C$ равны. На сторонах $AB$ и $BC$ нашлись соответственно точки $M$ и $N$ такие, что $MN \parallel AD$ и $MN = 2AD$. Пусть $K$ — середина отрезка $MN$, а $H$ — точка пересечения высот треугольника $ABC$. Докажите, что прямые $KH$ и $CD$ перпендикулярны. (*Б. Обухов*)

**Первое решение.** Воспользуемся следующим фактом.

**Лемма (теорема Монжа).** *Выпуклый четырёхугольник $XYZT$ является вписанным тогда и только тогда, когда перпендикуляры, опущенные из середин его сторон на противоположные стороны четырёхугольника, имеют общую точку.*

**Доказательство.** Пусть $P$, $Q$, $R$ и $S$ — середины сторон $XY$, $YZ$, $ZT$ и $TX$ соответственно. Как известно, $PQRS$ — параллелограмм, поэтому отрезки $PR$ и $QS$ имеют общую середину $T$. Симметрия относительно $T$ переводит перпендикуляры, опущенные из середин сторон на противоположные стороны, в серединные перпендикуляры к сторонам. Значит, первые имеют общую точку тогда и только тогда, когда вторые имеют общую точку, то есть когда $XYZT$ вписан. □

Перейдём к решению задачи. Выберем точки $C'$ и $A'$ так, что точки $C$ и $A$ — середины отрезков $NC'$ и $MA'$ соответственно (см. рис. 13). Поскольку $AD \parallel MN$ и $AD = MN/2$, отрезок $AD$ является средней линией в треугольнике $A'MN$, то есть $D$ — середина $NA'$.

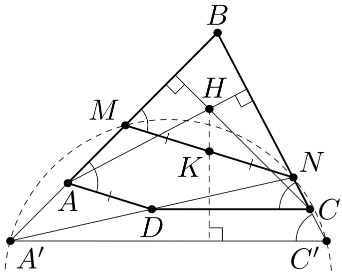

Рис. 13

Поскольку $CD$ и $AD$ — средние линии треугольников $NC'A'$ и $A'MN$, имеем $\angle NC'A' = \angle NCD = \angle MAD = 180^\circ - \angle A'MN$, то есть четырёхугольник $C'A'MN$ вписан. По лемме, из этого следует, что перпендикуляры из $A$ на $C'N$, из $C$ на $MA'$ и из $K$ на $C'A'$ пересекаются в одной точке. Но первые два перпендикуляра пересекаются в точке $H$; значит, $KH \perp C'A' \parallel CD$, что и требовалось.

**Второе решение.** Достаточно показать, что точка $H'$ пересечения высот треугольника $CDK$ совпадает с $H$.

Поскольку $AMKD$ — параллелограмм, имеем $KD \parallel AB$, а так как $CH' \perp KD$, то $CH' \perp AB$. Остаётся показать, что $AH' \perp CN$.

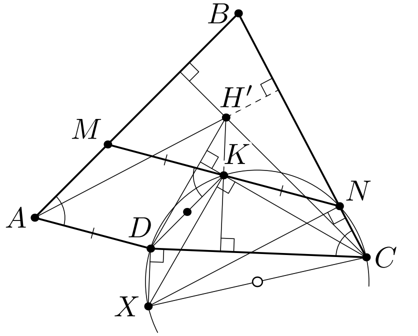


Рис. 14

Заметим, что $\angle DCN = \angle DAM = \angle DKM$, поэтому четырёхугольник $CNKD$ вписан в некоторую окружность. Пусть $CX$ — диаметр этой окружности (см. рис. 14). Тогда $CK \perp KX$, значит, $KX \parallel DH'$. Аналогично, $DX \parallel KH'$, поэтому $KH'DX$ — параллелограмм. Значит, при центральной симметрии относительно середины отрезка $DK$ точка $H'$ переходит в $X$. Поскольку $AKND$ — тоже параллелограмм, при этой же симметрии точка $N$ переходит в $A$. Отсюда $AH' \parallel XN$; поскольку $\angle XNC = 90^\circ$ (как опирающийся на диаметр), получаем $AH' \perp CN$.

**Третье решение.** Покажем, что $K$ — точка пересечения высот треугольника $CHD$; отсюда будет следовать требуемое.

Как и в предыдущем решении, из параллелограмма $AMKD$ получаем, что $DK \parallel AB \perp CH$. Осталось доказать, что $CK \perp$ $\perp DH$.

Пусть прямая $DK$ пересекает $BC$ в точке $V$. Достроим треугольник $BVD$ до параллелограмма $BVDU$; тогда точка $U$ лежит на $AB$, поскольку $DK \parallel AB$. Соответственные стороны треугольников $KVN$ и $AUD$ параллельны, так что эти треугольники подобны; поскольку $AD = KN$, они равны. Значит, $AU = KV$.

По условию, $\angle UAD = \angle VCD$. Поскольку $BVDU$ — парал-

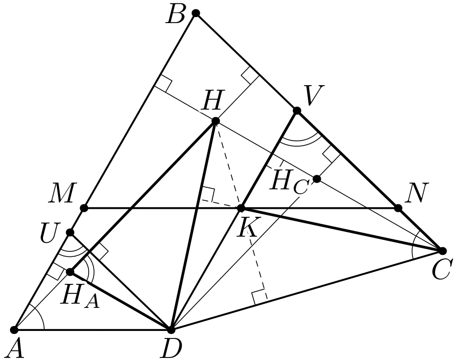


Рис. 15

лелограмм, имеем $\angle AUD = \angle CVD$. Значит, треугольники $AUD$ и $CVD$ подобны; поэтому $\frac{UD}{VD} = \frac{AU}{CV} = \frac{KV}{CV}$.

Пусть $H_A$ и $H_C$ — точки пересечения высот этих треугольников (см. рис. 15); тогда $DH_AHH_C$ — параллелограмм. Из подобия имеем $\frac{DH_A}{DH_C} = \frac{DU}{DV}$. Итак, $\frac{DH_A}{HH_A} = \frac{DH_A}{DH_C} = \frac{DU}{DV} = \frac{KV}{CV}$ и $\angle DH_AH = \angle KVC$ (соответственные стороны этих углов перпендикулярны). Значит, треугольники $DH_AH$ и $KVC$ подобны; а тогда из упомянутой перпендикулярности следует, что и $DH \perp CK$.

10.8. Доска для игры состоит из левой и правой частей. В каждой части есть несколько полей; между ними проведено несколько отрезков, каждый соединяет два поля из разных частей. При этом с любого поля можно по отрезкам добраться до любого другого. Изначально на одном поле левой части стоит лиловая фишка, а на одном поле правой — пурпурная. Лёша и Паша ходят по очереди; начинает Паша. За ход игрок перемещает свою фишку (Лёша — лиловую, а Паша — пурпурную) по отрезку на поле, на котором нет другой фишки. При этом запрещено создавать позицию, которая уже встречалась в игре (позиции совпадают, если в них лиловая фишка стоит на одном и том же поле, и пурпурная — тоже). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Существуют ли доска и начальное расположение фишек, при которых у Паши есть выигрышная стратегия? (*И. Богданов, М. Дидин*)

**Ответ.** Нет.

**Решение.** Приведём стратегию, позволяющую Лёше выиграть. Пусть $L$ и $P$ — поля, на которых исходно стоят лиловая ($\ell$) и пурпурная ($p$) фишки соответственно. По условию, от $L$ до $P$ можно дойти по отрезкам; пусть Лёша выберет один такой путь $L = L_1, P_1, L_2, P_2, \ldots, L_n, P_n = P$, в котором поля не повторяются. Позицию в игре будем обозначать парой $(A, B)$, где $A$ и $B$ — поля, на которых стоят $\ell$ и $p$ соответственно.

Лёша будет действовать следующим образом. Если его фишка $\ell$ стоит на $L_i$, он всегда перемещает её на $P_i$. Если $\ell$ стоит на $P_i$, то его ход зависит от положения $p$: если та стоит на $P$, то Лёша ходит на $L_{i+1}$, иначе — на $L_i$.

Заметим сразу, что количество позиций в игре конечно, так что игра рано или поздно закончится. Значит, если Лёша всегда может сходить согласно стратегии, то рано или поздно не сможет сделать ход Паша. Осталось показать, что Лёша всегда сможет так сходить. После хода Паши фишки находятся в одной и той же части, так что стратегия не может предписывать идти на поле, занятое $p$.

Пусть до некоторого момента Лёша ходил согласно стратегии, и перед очередным его ходом $\ell$ стоит на одном из полей $L_i$ или $P_i$ (а $p$ — на некотором поле $U$). Опишем множество уже встречавшихся позиций, в которых $\ell$ стояла на $L_i$ или $P_i$. Впервые $\ell$ появилась на $L_i$ в позиции $(L_i, P)$ перед пашиным ходом (возможно, это было начало игры). Затем после каждой пары ходов Паши и Лёши были использованы (в некотором порядке) позиции $(L_i, X)$ и $(P_i, X)$ при некотором поле $X \neq P$.

Итак, если перед ходом Лёши $\ell$ стоит на $L_i$, а $p$ — на поле $U$, то позиция $(P_i, U)$ не встречалась раньше. Если $\ell$ стоит на $P_i$, а $p$ — на поле $U \neq P$, то позиция $(L_i, U)$ также не встречалась раньше. Значит, в обоих случаях Лёша может сделать ход согласно стратегии. Наконец, если $\ell$ стоит на $P_i$, а $p$ — на поле $U = P$, то $i < n$ (иначе скакуны бы стояли на одном поле), так что поле $L_{i+1}$ существует, и $\ell$ на нём ещё не была. Поэтому Лёша может сходить туда. Доказательство окончено.