11 класс

11.5. Олег нарисовал пустую таблицу 50×50 и написал сверху от каждого столбца и слева от каждой строки по числу. Оказалось, что все 100 написанных чисел различны, причём 50 из них рациональные, а остальные 50 — иррациональные. Затем в каждую клетку таблицы он записал произведение чисел, написанных около её строки и её столбца («таблица умножения»). Какое наибольшее количество произведений в этой таблице могли оказаться рациональными числами? (*О. Подлипский*)

Ответ. 1275 произведений.

Решение. Сначала покажем, что иррациональных чисел в таблице не меньше 1225. Предположим, что среди рациональных чисел есть ноль и он выписан у верхней стороны таблицы.

Пусть вдоль левой стороны таблицы выписано x иррациональных и $50-x$ рациональных чисел. Тогда вдоль верхней стороны выписаны $50-x$ иррациональных и x рациональных чисел (среди которых есть ноль). Заметим, что произведение ненулевого рационального и иррационального чисел всегда иррационально. Тогда в таблице есть как минимум $x(x-1)+(50-x)^2$ иррациональных чисел. Заметим, что $f(x) = x(x-1)+(50-x)^2 = 2x^2 - 101x + 50^2$. Вершина параболы $f(x)$ находится в точке $101/4 = 25{,}25$, поэтому минимальное значение $f(x)$ в целой точке достигается при $x = 25$ и оно равно $25 \cdot 24 + 25^2 = 1225$.

Если же ноль заменить ненулевым рациональным числом, то количество иррациональных чисел может только увеличиться. Поэтому в таблице в любом случае не менее 1225 иррациональных чисел. Значит, в таблице не более $2500 - 1225 = 1275$ рациональных чисел.

Ровно 1275 рациональных чисел в таблице может быть, например, в таком случае. Вдоль левой стороны стоят числа $1, 2, \ldots, 24, 25, \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, \ldots, 25\sqrt{2}$, а вдоль верхней стороны — числа $0, 26, 27, \ldots, 49, 26\sqrt{2}, 27\sqrt{2}, \ldots, 50\sqrt{2}$. Тогда иррациональными будут только $25 \cdot 24 + 25^2 = 1225$ произведений ненулевого рационального и иррационального чисел.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Доказательство того, что рациональных чисел не более 1275 — 4 балла.

Если доказательство проведено лишь в частном случае, когда вдоль левой (или верхней стороны) стоит равное количество рациональных и иррациональных чисел — за эту часть решения ставится 1 балл вместо 4.

Неравенство $x(x-1)+(50-x)^2 \geqslant 1225$ (или эквивалентное) используется без доказательства — снимается 1 балл.

Верный пример, показывающий, что могло быть ровно 1275 рациональных чисел — 3 балла.

Только пример из ненулевых чисел, показывающий, что могло быть ровно 1250 рациональных чисел — 1 балл.

Утверждение, что произведение ненулевого рационального и иррационального чисел иррационально, можно использовать без доказательства.

Если это утверждение существенно используется для любых (не обязательно ненулевых) чисел (то есть используется неверное утверждение!) — за задачу ставится не более 2 баллов.

11.6. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность Γ с центром в точке O. Его диагонали AC и BD перпендикулярны и пересекаются в точке P, причём точка O лежит внутри треугольника BPC. На отрезке BO выбрана точка H так, что $\angle BHP = 90^\circ$. Окружность ω, описанная около треугольника PHD, вторично пересекает отрезок PC в точке Q. Докажите, что $AP = CQ$.

(*А. Кузнецов*)

Решение. Проведём в окружности Γ диаметр BT (см. рис. 4). Заметим, что $\angle PDT = \angle BDT = 90^\circ$. Значит, $\angle PHT + \angle PDT = 180^\circ$, то есть точка T лежит на окружности ω. Поэтому $\angle PQT = \angle PHT = 90^\circ$, и четырёхугольник $PQTD$ — прямоугольник.

Рассмотрим общий серединный перпендикуляр ℓ к отрезкам DT и PQ. Он проходит через O, а значит, является и серединным перпендикуляром к AC. Значит, отрезки AP и CQ симметричны относительно ℓ и потому равны.

Комментарий. Доказано, что описанная около треугольника PHD окружность проходит через точку T на окружности окружности Γ. диаметрально противоположную точке B (или,

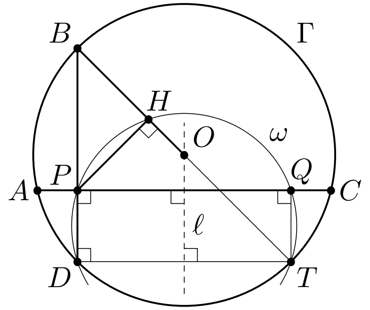

Рис. 4

эквивалентно, такую точку T на окружности Γ, что $DT \parallel AC$) — 3 балла.

11.7. На плоскости проведено несколько прямых, никакие две из которых не параллельны и никакие три не проходят через одну точку. Докажите, что в областях, на которые прямые поделили плоскость, можно расставить положительные числа так, чтобы суммы чисел по обе стороны относительно любой из проведённых прямых были равны.

(*О. Орлов*)

Решение. Обозначим проведённые прямые $\ell_1, \ell_2, \ldots, \ell_n$, упорядочив их направления по часовой стрелке (см. рис. 5). Формально это означает следующее. Рассмотрим произвольную точку плоскости O. Проведем через неё прямые, параллельные нашим, занумеруем их по часовой стрелке, а потом присвоим нашим прямым те же номера, которые получили соответствующие им новые прямые.

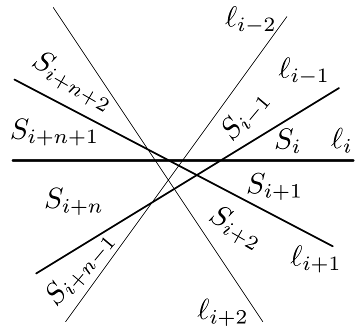

Рис. 5

Среди областей, на которые наши прямые разрезали плоскость, есть $2n$ бесконечных *кусков*; обозначим их по часовой стрелке $S_1, S_2, \ldots, S_{2n}$ так, что прямая ℓ_i разделяет куски S_i и S_{i+1}, а также куски S_{i+n} и S_{i+n+1}. (Здесь и далее мы считаем, что $S_{2n+1} = S_1$.)

Для начала во все области (конечные и бесконечные) поставим по 1. Для каждой прямой ℓ_i обозначим через Σ_i разность сумм чисел справа и слева от ℓ_i (мы считаем, что куски S_i и S_{i+n+1} лежат слева от ℓ_i). Если $\Sigma_i > 0$, то прибавим по $\frac{1}{2}\Sigma_i$ к числам, стоящим в S_i и S_{i+1+n}. При этом все числа Σ_j при $j \neq i$ не изменились, поскольку области S_i и S_{i+1+n} лежат по разные стороны относительно любой прямой, кроме ℓ_i. Число же Σ_i стало равно нулю. Аналогично, если $\Sigma_i < 0$, то прибавим по $\frac{1}{2}|\Sigma_i|$ к числам, стоящим в S_{i+1} и S_{i+n}; опять же, Σ_i станет равна 0, а остальные Σ_j не изменятся.

Такими операциями мы последовательно сделаем каждое Σ_i равным нулю, не меняя остальных.

Замечание. В некоторых работах может происходить попытка коррекции какой-то исходной расстановки путём добавления отрицательных чисел к числам в областях. В подобном решении нужно очень тщательно следить, чтобы итоговые числа в областях оставались положительными; обычно добиться этого достаточно сложно.

Комментарий. Если в работе предъявлен алгоритм, по итогам работы которого возможно появление неположительных чисел в областях — не более 2 баллов за задачу.

11.8. Изначально на стол кладут 100 карточек, на каждой из которых записано по натуральному числу; при этом среди них ровно 28 карточек с нечётными числами. Затем каждую минуту проводится следующая процедура. Для каждых 12 карточек, лежащих на столе, вычисляется произведение записанных на них чисел, все эти произведения складываются, и полученное число записывается на новую карточку, которая добавляется к лежащим на столе. Можно ли выбрать исходные 100 чисел так, что для любого натурального d на столе рано или поздно появится карточка с числом, делящимся на 2^d? *(И. Богданов)*

Ответ. Нет, нельзя.

Решение. Если в некоторый момент среди чисел на карточках есть ровно k нечётных, то среди произведений чисел по 12 ровно C_k^{12} нечётных; поэтому число на очередной добавляемой карточке будет нечётным ровно тогда, когда C_k^{12} нечётно (и тогда k в эту минуту увеличится на 1).

Нетрудно заметить, что число C_{28}^{12} нечётно (это следует из

того, что степени двойки, входящие в $28\cdot 27\cdot\ldots\cdot 17$ и $12\cdot 11\cdot\ldots\cdot 1$, равны). Далее, поскольку $C_{28+t}^{12} = \frac{(28+1)(28+2)\ldots(28+t)}{(16+1)(16+2)\ldots(16+t)}\cdot C_{28}^{12}$, получаем, что наименьшее t, при котором C_{28+t}^{12} чётно, равно 4. Итак, количество нечётных чисел на карточках будет расти, пока не достигнет 32 (на 4-й минуте), а после этого на карточках всегда будет ровно 32 нечётных числа.

Рассмотрим числа на карточках после $n \geqslant 4$ минут. Пусть T_n — сумма всех произведений 12 из этих чисел, а D_n — сумма всех произведений 11 из этих чисел. Число T_{n+1} отличается от T_n прибавлением всех произведений по 12 чисел, среди которых есть только что добавленное, то есть прибавлением $T_n E_n$; итак, $T_{n+1} = T_n + E_n T_n = T_n(1 + E_n)$. Заметим при этом, что $E_n \equiv C_{32}^{11} \pmod 2$ при $n \geqslant 4$, а число $C_{32}^{11} = \frac{12}{21}\cdot C_{32}^{12}$ чётно. Значит, при $n \geqslant 4$ число $1 + E_n$ нечётно, и степень двойки, на которую делится T_{n+1}, равна степени двойки, на которую делится T_n.

Выберем теперь d так, чтобы после пятой минуты ни одно из чисел на карточках не делилось на 2^d; в частности, только что добавленное число T_4 также не будет делиться на 2^d. Значит, и все числа $T_5, T_6, \ldots$ не будут делиться на 2^d, а это в точности числа, написанные на карточках, добавляемых после пятой минуты. Итак, на карточках никогда не появится числа, делящегося на 2^d.

Комментарий. Только верный ответ — 0 баллов.

Описано, в каких случаях число на добавляемой карточке нечётно (например, как в первом абзаце решения) — 1 балл.

Доказано, что, начиная с пятой минуты, добавляются только чётные числа — добавляется ещё 1 балл.