

# XXIV Всероссийская олимпиада школьников по астрономии

Смоленск, 2017 г.

## Практический тур

### X/XI.1 ЗВЕЗДЫ-БЕГЛЕЦЫ

О.С. Угольников

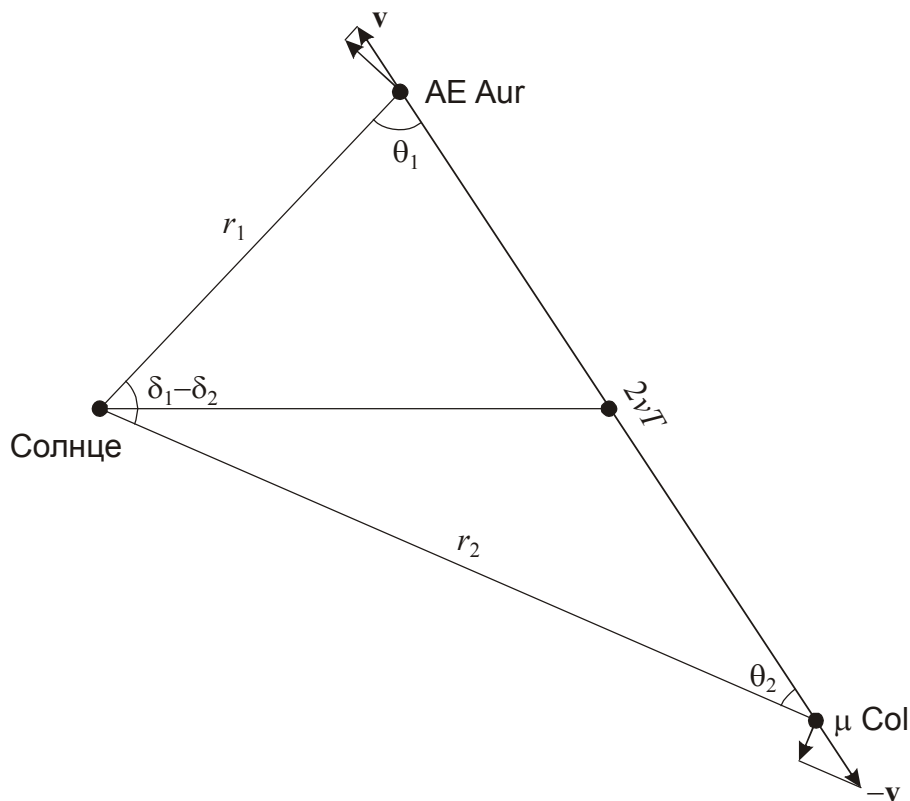
**Условие.** В таблице приведены координаты и данные о собственном движении двух звезд. Известно, что эти звезды образовались совместно, после чего разлетелись в противоположных направлениях с равными скоростями. Исходя из этого, определите, сколько времени прошло с момента их разлета. Разницей прямых восхождений, собственным движением звезд по прямому восхождению, а также их гравитационным взаимодействием (взаимным и с другими объектами) пренебречь. Считать, что Солнце неподвижно относительно центра масс системы из этих звезд. Что Вы можете сказать о месте образования звезд?

Звезда	$\alpha$	$\delta$	$\mu\alpha$ , 0.001"/год	$\mu\delta$ , 0.001"/год
$\kappa$ Возничего	05.5ч	+34.3°	~0	+44.7
$\mu$ Голубя	05.5ч	-32.3°	~0	-22.2

**Решение.** В соответствии с условием задачи, звезды имеют сходное прямое восхождение и движутся на небе в противоположные стороны вдоль одного круга склонения. Самый простой, но при этом не вполне точный способ определить время с момента разлета звезд – предположить, что собственное движение за это время не менялось. Тогда решение находится элементарно:

$$\tilde{T} = \frac{\delta_2 - \delta_1}{\mu_2 - \mu_1} = \frac{1^\circ}{0.001''} \text{ лет} = 3.6 \text{ млн лет.}$$

Однако, сделанное при этом предположение, вообще говоря, противоречит условию задачи. Очевидно, что в момент разлета звезды имели собственные движения, равные по модулю и противоположные по знаку. Как видно из таблицы, в настоящий момент это не так, следовательно, собственные движения успели измениться. Изобразим положение звезд на рисунке в плоскости, содержащей Солнце и линию, соединяющую звезды:



По условию задачи, звезды разлетаются в пространстве вдоль одной прямой со скоростями  $v$  и  $-v$  и к моменту наблюдений разошлись на расстояние  $2vT$ , где  $T$  – возраст звезд. Обозначим через  $r_{1,2}$  текущие расстояния до звезд. Собственные движения (угловые скорости) звезд равны

$$\mu_1 = \frac{v \sin \theta_1}{r_1}; \quad \mu_2 = -\frac{v \sin \theta_2}{r_2}.$$

Рассмотрим треугольник "Солнце – AE Aur –  $\mu$  Col". Из теоремы синусов имеем:

$$\frac{2vT}{\sin(\delta_1 - \delta_2)} = \frac{r_1}{\sin \theta_2} = \frac{r_2}{\sin \theta_1}.$$

Подставим в последнюю формулу выражение для синусов углов из определения собственного движения:

$$\frac{2vT}{\sin(\delta_1 - \delta_2)} = -\frac{vr_1}{r_2\mu_2} = \frac{vr_2}{r_1\mu_1}.$$

Возведем в квадрат первое из трех равных выражений и перемножим два других:

$$\frac{4v^2T^2}{\sin^2(\delta_1 - \delta_2)} = -\frac{v^2}{\mu_1\mu_2}.$$

Отсюда получаем выражение для интервала времени с момента разлета звезд:

$$T = \frac{\sin(\delta_1 - \delta_2)}{2\sqrt{-\mu_1\mu_2}} = 3.0 \text{ млн лет.}$$

Знак "-" под квадратным корнем не должен смущать, так как собственные движения звезд имеют разные знаки. Звезды очень молодые, что естественно, так как обе являются горячими сверхгигантами со светимостью в несколько десятков тысяч светимостей Солнца. По координатам мы можем видеть, что точка их рождения находится вблизи туманности Ориона. Данные две звезды являют собой классический пример так называемых "звезд-беглецов", получивших сильные противоположные импульсы в результате взаимодействия с другими звездами этой ассоциации, вероятнее всего – с компонентами двойной системы  $\iota$  Ориона.

#### **Система оценивания (от одного члена жюри).**

##### **1 этап: 6 баллов.**

Правильная двумерная геометрическая картина взаимного расположения и движения двух звезд относительно Солнца, учет изменения их собственного движения с момента разлета.

##### **2 этап: 4 балла.**

Вычисление времени, прошедшего с момента разлета звезд.

##### **3 этап: 2 балла.**

Вывод о происхождении звезд в Туманности Ориона.

**Возможная ошибка при решении:** участники могут найти время с момента разлета по первой формуле решения, предполагая постоянство собственных движений. В этом случае первый этап решения не засчитывается, второй и третий оцениваются, исходя из точности выполнения. Максимальная оценка может составить 6 баллов.

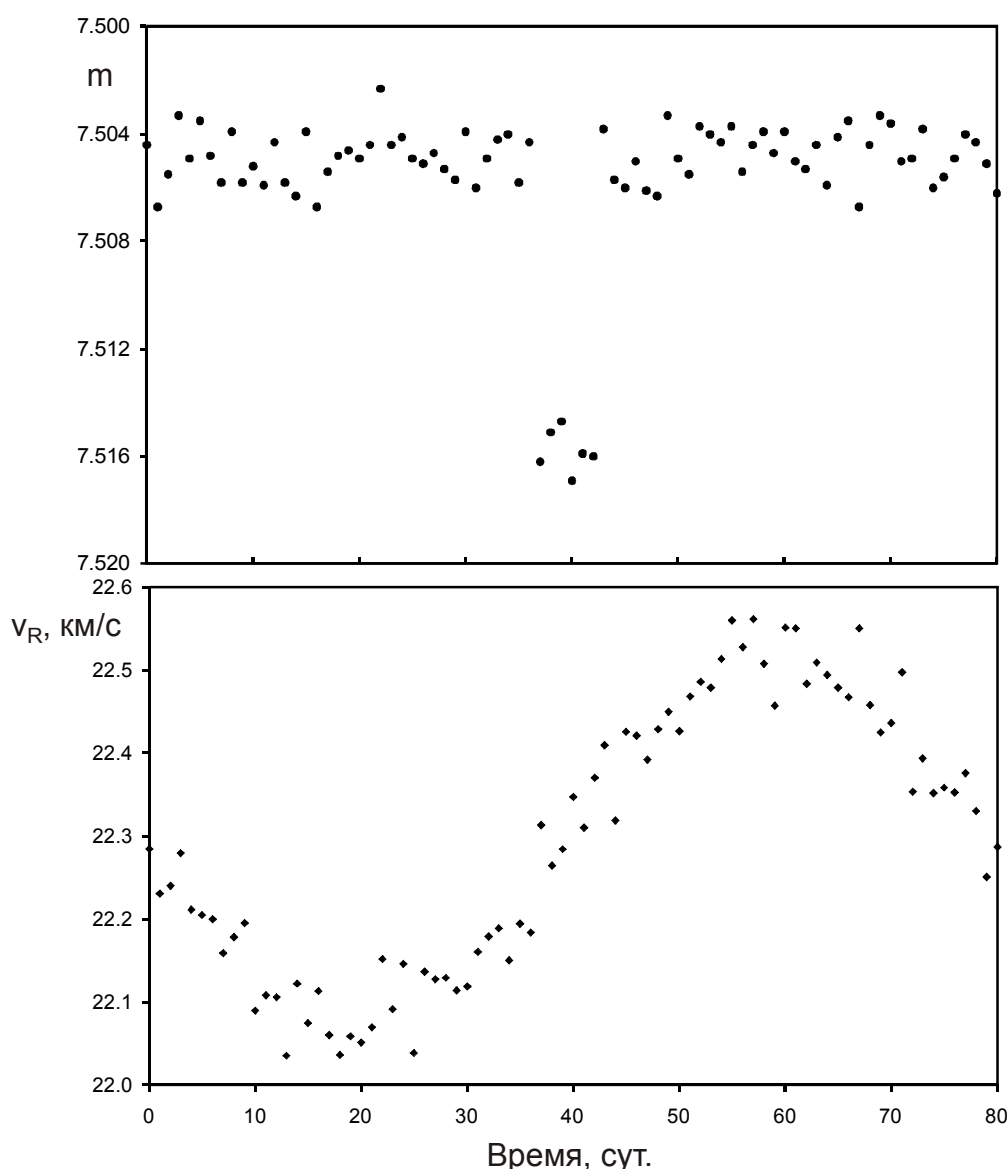
**Возможная ошибка при решении:** участники отмечают, что скорости звезд не перпендикулярны направлению к наблюдателю, но время оценивают в модели постоянных собственных движений. В этом случае суммарная оценка за 1-2 этапы (при отсутствии ошибок) не превосходит 6 баллов.

# X/XI.3 ДАЛЕКАЯ ПЛАНЕТА

О.С. Угольников



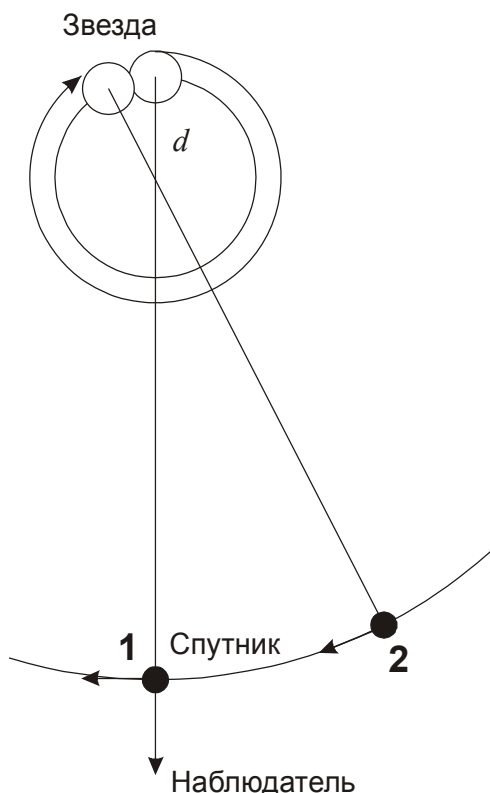
**Условие.** Около звезды с массой, равной массе Солнца, был обнаружен темный спутник. В некоторой обсерватории с интервалом ровно в 1 сутки производились одновременные измерения видимой звездной величины и гелиоцентрической лучевой скорости звезды, результаты представлены на графиках. Определите радиус звезды, массу и радиус спутника. Считать, что наблюдатель располагается в плоскости круговых орбит системы, а оба тела имеют сферическую форму. Других массивных тел в этой системе нет. Эффект потемнения звезды к краю не учитывать. Что из себя представляет эта звезда и чему равно расстояние до нее?



**Решение.** На первый взгляд, графики достаточно четко создают представление об этой системе. Наличие спутника приводит к двум эффектам – кратковременному падению блеска звезды в тот момент, когда темный спутник оказывается перед ней, а также синусоидальному изменению лучевой скорости звезды, связанному с ее движением относительно общего центра масс. Можно предположить, что орбитальный период составляет как раз 80 суток. Однако, более внимательный анализ показывает, что это не соответствует действительности.

Рассмотрим момент, соответствующий затмению звезды (момент времени 40 суток на графике), изображенный на рисунке цифрой 1. В это время оптическая звезда находится в наиболее удаленной от Земли точке орбиты. После затмения она должна начать приближаться к наблюдателю, что означает уменьшение ее лучевой скорости. Однако, последующие точки на кривой лучевой скорости, если не учитывать их погрешность, оказываются выше, то есть соответствуют удалению оптической звезды от наблюдателя.

Данное противоречие снимается, если вспомнить, что все наблюдения производились с интервалом ровно в 1 сутки. Коль скоро последующие за затмением (40 суток) измерения соответствуют большей лучевой скорости, на них система оказывается в предшествующей фазе (начало затмения или незадолго до него). Следовательно, за 1 сутки система почти успевает сделать  $N$  целых оборотов, приближаясь уже к следующему затмению (случай  $N=1$  показан на рисунке).



К моменту следующего наблюдения через время  $t$  (1 сутки) система не успела завершить  $(1/K)$  целого оборота, где  $K=80$ . Тогда орбитальный период выражается как:

$$T = \frac{t}{N - (1/K)} \approx \frac{t}{N}.$$

Целое число  $N$  заранее неизвестно. Определим другие характерные параметры системы. Предположив, что масса спутника меньше массы звезды (в дальнейшем мы сможем это проверить), которая сама равна массе Солнца, из III закона мы получаем величину радиуса орбиты спутника:

$$a = (T, \text{годы})^{2/3} = 3 \text{ млн км} / N^{2/3}.$$

Звездная величина вне затмений составляет  $m_0 = 7.505$ , во время затмений она уменьшается до  $m_1 = 7.516$ . Так как наблюдатель находится точно в плоскости орбиты системы, а яркость звезды однородна по диску, мы можем получить соотношение радиусов компонент:

$$m_0 - m_1 = 2.5 \log \left( \frac{\pi R^2 - \pi r^2}{\pi R^2} \right) = 2.5 \frac{\ln(1 - r^2 / R^2)}{\ln 10} = - \frac{2.5}{\ln 10} \frac{r^2}{R^2};$$

$$\frac{r}{R} = \sqrt{\frac{\ln 10 \cdot (m_1 - m_0)}{2.5}} \approx \sqrt{0.92(m_1 - m_0)} = 0.1.$$

Спутник в 10 раз меньше звезды по радиусу. Далее, из  $K=80$  измерений через равные интервалы времени  $k=6$  пришлось на затмения. Следовательно, длительность затмения есть примерно  $k/K$  от орбитального периода  $T$ . За весь период спутник пролетает путь  $2\pi a$ , а за время затмения – диаметр главной звезды (мы вновь считаем спутник много меньшим звезды как по размерам, так и по массе). Тогда мы получаем величину радиуса звезды:

$$\frac{2R}{2\pi a} = \frac{k}{K}; \quad R = \frac{\pi a k}{K} = \frac{700 \text{ тыс. км}}{N^{2/3}}.$$

Итак, если предположить, что за одни сутки система почти завершила один оборот, то радиус звезды получается равным радиусу Солнца. Учитывая, что по массе звезда также схожа с Солнцем, это представляется наиболее вероятным вариантом. Действительно, подстановка  $N=2$  дает радиус в 0.63 радиуса Солнца. Подобных звезд с солнечной массой не существует, так как звезда солнечной массы не может иметь подобный радиус ни на каких стадиях своей эволюции. Даже редкие типы звезд - субкарлики - при солнечной массе имеют больший радиус. Такие же выводы можно сделать и для больших  $N$ . Единственный альтернативный вариант, который можно считать теоретически возможным – белый карлик с радиусом порядка радиуса Земли, и тогда  $N \sim 1000$ . Хотя это и представляется крайне маловероятным для затменной системы, мы рассмотрим этот вариант наряду с основным в дальнейшем решении.

Амплитуда изменений лучевой скорости звезды  $v$  (ее отклонение от среднего значения) составляет 0.2 км/с. Учитывая ориентацию орбиты, это есть сама орбитальная скорость звезды. Радиус орбиты звезды составляет

$$A = \frac{vT}{2\pi} = \frac{3000 \text{ км}}{N}.$$

Зная радиусы орбит звезды и спутника, мы получаем соотношение их масс:

$$\frac{m}{M} = \frac{A}{a} = \frac{3000 \text{ км}}{N} \cdot \frac{N^{2/3}}{3 \text{ млн км}} = \frac{0.001}{N^{1/3}}.$$

Если вспомнить о варианте белого карлика ( $N \sim 1000$ ), то спутник будет представлять собой тело с массой  $10^{-4}$  массы Солнца. При этом его радиус в 10 раз меньше радиуса звезды, то есть около 600 км! В настоящее время таких плотных маломассивных объектов во Вселенной не найдено, более того, непонятно, как они могли бы появиться. Поэтому правдоподобным остается лишь вариант  $N=1$ , при котором звезда оказывается копией Солнца, а ее спутник в 10 раз меньше по размеру и в 1000 раз меньше по массе. Он очень похож на планету Юпитер. Можно показать, что несмотря на близость к звезде, он будет устойчивым к приливным силам, которые будут более чем в 10 раз слабее, чем это требуется для разрыва планеты.

Нам остается найти расстояние до системы. Учитывая, что звезда похожа на Солнце (абсолютная величина  $+4.7^m$ ), а ее видимый блеск равен  $+7.5^m$ , мы можем заключить, что система отстоит от нас на 35 пк.

## Система оценивания (от одного члена жюри).

### 1 этап: 4 балла.

Ключевой момент решения – вывод о возможных значениях орбитального периода. При выводе, что период равен 80 суткам, весь этап не засчитывается (0 баллов). Если в качестве единственного возможного периода берутся 1 сутки (без рассмотрения возможности других целых  $N$ ), из этих 4 баллов выставляется 3 балла, остальные этапы решения (кроме возможного анализа типа звезд для разных  $N$ ) оцениваются в полной мере, даже если они рассматриваются только для  $N=1$ .

### 2 этап: 1 балл.

Вычисление соотношения радиусов, исходя из глубины минимумов блеска.

### 3 этап: 1 балл.

Выражение для радиуса звезды, исходя из длительности затмений (в явном виде либо учет по ходу последующих вычислений).

### 4 этап: 2 балла.

Выражение для массы планеты через амплитуду лучевой скорости звезды. Если вместо амплитуды берется сама лучевая скорость (22 км/с), данный этап не засчитывается, равно как и последующие, так как они приводят к неестественно большой массе планеты.

### 5 этап: 2 балла.

Анализ, какие из чисел  $N$  могут иметь физический смысл. Оценивается только для тех решений, где предположена возможность разных чисел  $N$ . Необходимо сделать вывод, что значения  $N>1$  не соответствуют ни нормальным звездам, ни белым карликам (из-за неестественных свойств планеты). Если участник олимпиады допускает вариант  $N=2$  как соответствующий субкарликам, эта ошибка считается незначительной и не влияет на оценку.

### 6 этап: 1 балл.

Вывод о типе звезды. Выставляется только в случае правильного ответа (Солнце), полученного на основе правильного анализа случая  $N=1$ .

### 7 этап: 1 балл.

Определение расстояния до системы. Оценивается только для правильного и обоснованного на предыдущих этапах вывода, что звезда аналогична Солнцу по своим свойствам.

**Возможная ошибка участника:** Предположение, что орбитальный период планеты составляет 80 дней. Оно приводит к большому радиусу как звезды (20 радиусов Солнца), так и планеты (2 радиуса Солнца!). При подобном решении не засчитывается первый этап (0 баллов). Этапы 2-4 засчитываются при условии корректности расчетов (сумма – 4 балла). Этап 5 в этом решении отсутствует, этап 6 в задаче не засчитывается, так как он приводит к абсурдному радиусу планеты. 7 этап правильно выполнить невозможно, так как неизвестна светимость звезды. Общая оценка не может превышать 4 баллов.

**Возможная ошибка участника:** рассматривается только вариант  $N=1$  с получением правильного ответа (звезда типа Солнца). В этом случае за первый этап выставляется 3 балла, этапы 2-4 засчитываются полностью (при условии правильности выполнения). Этап 5 при таком решении отсутствует, этапы 6 и 7 – корректны. Общая оценка не может превышать 9 баллов.

## XI.2 ГРЯДУЩЕЕ ПОКРЫТИЕ

О.С. Угольников



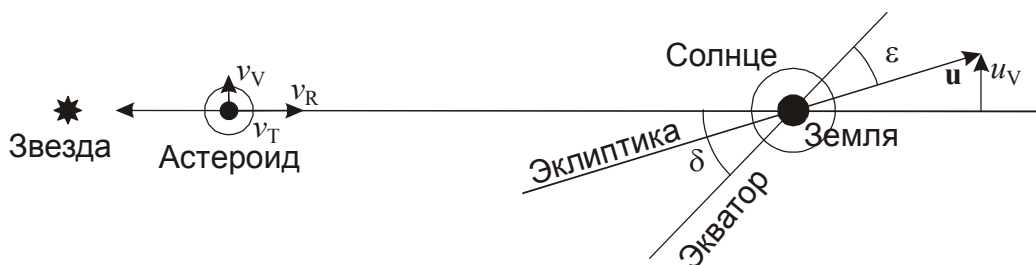
**Условие.** Перед Вами карта видимости покрытия звезды ТУС 2428-01094-1 (видимая величина 11.5<sup>m</sup>) астероидом Каллиопа 24 марта 2017 года с 16ч57м до 17ч08м по Всемирному времени, видимого на территории России (моменты времени в минутах указаны

на карте). Земля изображена, как она наблюдается со стороны астероида. Дневная часть поверхности Земли заштрихована сплошными линиями, сумеречная – пунктирными линиями. Координаты звезды:  $\alpha = 6^h 17.6^m$ ,  $\delta = +34^\circ 39'$ . Астероид принадлежит главному поясу. Считая его орбиту круговой, определите расстояние от Земли до астероида в момент покрытия.



**2. Решение.** Покрытие звезды астероидом наблюдается через 4 дня после весеннего равноденствия. За это время Солнце сместилось в своем видимом движении примерно на  $4^\circ$  (16 минут) к востоку от точки весеннего равноденствия вдоль эклиптики. По координатам мы видим, что звезда и астероид отстоят примерно на то же расстояние к востоку от точки летнего солнцестояния и при этом находятся чуть выше эклиптики. Получается, что астероид располагается в восточной квадратуре, в  $90^\circ$  от Солнца и примерно в  $11^\circ$  к северу от точки летнего солнцестояния. К выводу о квадратуре также можно прийти, заметив, что с астероида видна половина освещенной части поверхности Земли.

Если изобразить Землю в плоскости, перпендикулярной плоскостям экватора и эклиптики, то астероид и звезда также окажутся вблизи плоскости этого рисунка. Радиус-вектор орбиты Земли перпендикулярен плоскости рисунка, Солнце в нем располагается за Землей. В своем орбитальном движении Земля движется практически от астероида.



Так как звезда располагается от Земли несопоставимо дальше, чем астероид, движение его тени (области видимости покрытия) происходит с той же скоростью, что и геоцентрическое движение астероида. Из предложенной карты мы можем определить компоненты этой скорости в двух взаимно-перпендикулярных направлениях. Отметив положения центра тени

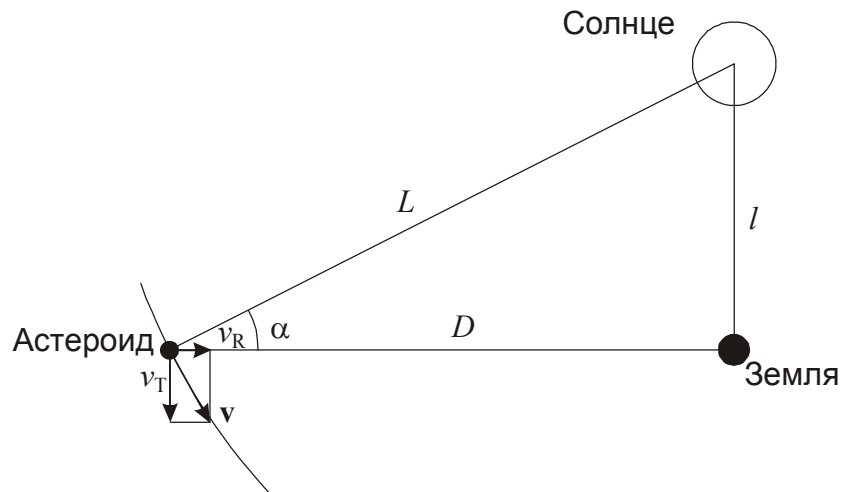


на двух хорошо заметных удаленных делениях (например, 16ч59м и 17ч07м), получаем, что в горизонтальном направлении за восемь минут (480 секунд) астероид проходит расстояние, равное 0.64 от диаметра Земли или 8100 км. Геоцентрическая скорость астероида  $v_T$  в этом направлении равна 16.9 км/с. Это направление перпендикулярно плоскости рисунка выше, и полученная скорость отражает движение астероида вокруг Солнца, так как Земля движется в плоскости рисунка.

В перпендикулярном направлении геоцентрическое движение астероида направлено на юг, а его скорость составляет 0.085 диаметра Земли или 1080 км за 8 минут. Соответствующая скорость равна 2.3 км/с. Скорость Земли в этом направлении составляет

$$u_V = u \sin(\delta - \varepsilon) = 5.9 \text{ км/с}$$

и направлена на север. Мы получаем, что вертикальная проекция гелиоцентрической скорости астероида  $v_V$  составляет всего 3.6 км/с, что существенно меньше проекции  $v_T$ . Мы можем пренебречь проекцией  $v_V$  и считать, что астероид в проекции рисунка движется горизонтально. Изобразим теперь ситуацию в проекции на плоскость, перпендикулярную первому рисунку и содержащую Солнце, Землю и астероид.



Обозначим радиусы орбит Земли и астероида как  $l$  и  $L$ , а угловое расстояние между Солнцем и Землей как  $\alpha$ . Очевидно, что  $\sin \alpha = l/L$ . Орбитальная скорость астероида равна

$$v = \frac{v_T}{\cos \alpha} = u \sqrt{\frac{l}{L}} = u \sqrt{\sin \alpha}.$$

Здесь  $u$  – орбитальная скорость Земли. Отсюда получаем:

$$\frac{v_T}{u} = \cos \alpha \sqrt{\sin \alpha} = \sqrt{\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha)};$$

$$\sin^3 \alpha - \sin \alpha + (v_T / u)^2 = 0.$$

У этого кубического уравнения, вообще говоря, будет три корня, два из которых имеют физический смысл ( $0 < \sin \alpha < 1$ ). Чтобы решить это уравнение наиболее простым способом, и при этом сразу найти единственный нужный корень, учтем, что астероид принадлежит главному поясу, и мы примерно знаем отношение  $l/L$  (около 1/3). Будем считать это число малым и введем обозначения:  $\sin \alpha = x$ ,  $(v_T/u)^2 = C$ :

$$x^3 - x + C = 0.$$

Предположим поначалу, что число  $x^3$  очень мало, и определим приближенное решение:

$$x_0 = C = 0.32,$$

что само по себе близко к сделанному выше предположению (1/3). Введя обозначение  $x = x_0 + \delta x$  и считая величину  $\delta x$  малой, имеем:

$$x_0^3 + 3x_0^2 \delta x - x - \delta x + C = C^3 + 3C^2 \delta x - C - \delta x + C = C^3 + (3C^2 - 1)\delta x = 0;$$
$$x = C + \delta x = C + \frac{C^3}{1 - 3C^2} = \frac{C - 2C^3}{1 - 3C^2} = 0.37.$$

Данное решение кубического уравнения можно также получить методом последовательных приближений с учетом малой величины  $x^3$ . В этом случае, приближенное решение на  $(N+1)$  шаге равно

$$x_{N+1} = x_N^3 + C.$$

Начальное приближение берется в таком же виде:  $x_0 = C = 0.32$ . Цепочка приближений даст тот же ответ  $x = 0.37$ . Он отличается от точного лишь в третьем знаке после запятой. Нам остается найти расстояние между Землей и астероидом:

$$D = \frac{l}{\operatorname{tg} \alpha} = l \sqrt{\frac{1 - x^2}{x^2}} = 2.5 \text{ а.е.},$$

что опять же близко к истинному значению, несмотря на все сделанные предположения. В реальности, орбита Каллиопы слегка вытянута, и в момент покрытия астероид располагается ближе к точке перигелия. Тем не менее, расстояние составляет 2.54 а.е., мало отличаясь от полученного в ходе решения.

## 2. Система оценивания (от одного члена жюри).

### 1 этап: 2 балла.

Вывод, что астероид находится вблизи квадратуры либо вычисление его углового расстояния от Солнца на небе.

### 2 этап: 3 балла.

Определение геоцентрической скорости астероида (две компоненты либо модуль и угол). Если находится только горизонтальная скорость в пренебрежении углом наклона, из этих 3 баллов выставляется 2, остальные этапы решения оцениваются в полной мере. Допускаются погрешности в пределах 0.3-0.4 км/с.

### 3 этап: 3 балла.

Выражение для гелиоцентрической орбитальной скорости астероида. При этом участники могут указать, что она лежит в плоскости "Солнце-Земля-астероид", пренебрегая компонентой  $v_V$ , а могут проводить полный трехмерный анализ.

### 4 этап: 4 балла.

Вычисление расстояния между Землей и астероидом.

**Возможная ошибка участника:** Полученная тангенциальная скорость астероида сразу приравнивается к его орбитальной скорости, пренебрегая углом  $\alpha$  (это эквивалентно нулевому приближению решения кубического уравнения) с ответом 2.8-2.9 а.е. В этом случае за третий этап при правильных вычислениях выставляется только 1 балл, за 4 этап – также 1 балл. Максимальная оценка составляет 7 баллов.