11 класс

11.5. Назовём непустое (конечное или бесконечное) множество A, состоящее из действительных чисел, *полным*, если для любых действительных a и b (не обязательно различных и не обязательно лежащих в A) таких, что $a+b$ лежит в A, число ab также лежит в A. Найдите все полные множества действительных чисел.

(*Н. Агаханов*)

Ответ. Такое множество одно: это множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Первое решение. Пусть A — полное множество. Поскольку оно непусто, то можно выбрать элемент $a \in A$. Тогда $a + 0 = a \in A$, значит, $a \cdot 0 = 0 \in A$. Так как $(-x) + x = 0 \in A$, получаем теперь, что $(-x) \cdot x = -x^2 \in A$ при всех действительных x. В силу произвольности выбора x отсюда следует, что любое отрицательное число также принадлежит множеству A.

Наконец, для любого $b > 0$ из того, что число $(-b) + (-b) = -2b$ лежит в A, получаем, что $b^2 = (-b) \cdot (-b) \in A$. Значит, и произвольное положительное число также лежит в A. Итак, в A входят все действительные числа.

Второе решение. Как и в первом решении, выберем произвольный элемент $s \in A$. Докажем, что любое $t \leqslant 0$ лежит в A. Рассмотрим уравнение $x^2 - sx + t = 0$; его дискриминант неотрицателен, так что оно имеет два (возможно, совпадающих) корня a и b. Тогда по теореме Виета имеем $a + b = t$ и $ab = s$. Поскольку $a + b = s \in A$, получаем, что и $t \in A$.

Осталось показать, что любое $u > 0$ также лежит в A. По доказанному выше, $(-u) + (-1) \in A$; значит, и $(-u) \cdot (-1) = u$ также лежит в A.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Показано только, что полное множество содержит все отрицательные (или все неположительные) числа — 3 балла.

11.6. В пространстве расположены 2016 сфер, никакие две из них не совпадают. Некоторые из сфер — красного цвета, а остальные — зеленого. Каждую точку касания красной и зеленой сферы покрасили в синий цвет. Найдите наибольшее возможное количество синих точек.

(*А. Кузнецов*)

Ответ. $1008^2 = 1\,016\,064$ точек.

Решение. Пусть среди сфер есть r красных и $2016-r$ зелёных. Так как у любых двух сфер максимум одна точка касания, количество синих точек не превосходит $r(2016-r) = 1008^2 - (1008-r)^2 \leqslant 1008^2$.

Предъявим пример с таким количеством синих точек. Пусть ℓ — некоторая прямая, α — плоскость, перпендикулярная ℓ и пересекающая её в точке O, а ω — окружность с центром O и радиусом 1, лежащая в α. Построим 1008 красных сфер одинакового радиуса $r < 1$ с различными центрами $R_1, R_2, \ldots, R_{1008}$, лежащими на ω.

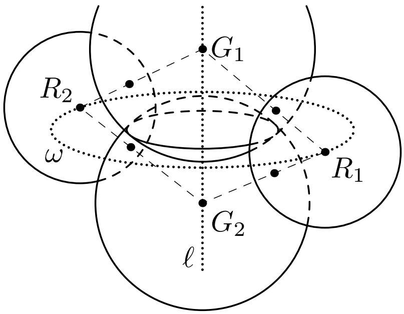

Рис. 6

Пусть $G_1, G_2, \ldots, G_{1008}$ — различные точки на ℓ, удалённые от O на расстояния $d_1, d_2, \ldots, d_{1008}$. Тогда расстояние между G_i и любой точкой R_j равно $\sqrt{1+d_i^2}$. Значит, если мы построим зелёную сферу с центром G_i и радиусом $\sqrt{1+d_i^2}-r$, она будет касаться всех синих сфер. При этом все точки касания будут попарно различными, поскольку они лежат на отрезках вида R_jG_i, которые не имеют общих точек, кроме концов. Значит, в нашей конструкции действительно будут отмечены 1008^2 синих точек.

Замечание. Все красные сферы в этом примере получаются друг из друга вращением вокруг прямой ℓ. Поэтому, если зелёная сфера, центр которой лежит на ℓ, касается одной красной сферы, то она касается и всех красных сфер.

Комментарий. Только ответ — 0 баллов.

Только доказательство того, что синих точек не больше, чем $1008^2 - 1$ балл.

Верный пример без доказательства оптимальности — 5 баллов.

11.7. По кругу стоят n мальчиков и n девочек. Назовем пару из мальчика и девочки *хорошей*, если на одной из дуг между ними стоит поровну мальчиков и девочек (в частности, стоящие рядом мальчик и девочка образуют хорошую пару). Оказалось, что есть девочка, которая участвует ровно в 10 хороших парах. Докажите, что есть и мальчик, который участвует ровно в 10 хороших парах. (*Н. Власова*)

Решение. Заметим сразу, что на *любой* дуге между членами хорошей пары поровну девочек и мальчиков.

Пусть D — девочка, участвующая в 10 хороших парах. Обозначим всех детей по часовой стрелке $K_1, K_2, \ldots, K_{2n}$ так, что K_1 — это D, и продолжим нумерацию циклически (например, $K_0 = K_{2n}$ и $K_{2n+1} = K_1$). При $i = 1, 2, \ldots, 2n$ обозначим через d_i разность между количествами девочек и мальчиков среди $K_1, K_2, \ldots, K_i$; в частности, $d_1 = 1 - 0 = 1$ и $d_{2n} = 0$ (поэтому можно продолжить эту последовательность, полагая $d_{2n+1} = d_1$ и т. д.). Девочка D образует с K_i хорошую пару тогда и только тогда, когда $d_i = 0$ и K_i — мальчик, т. е. $d_i = 0$ и $d_{i-1} = 1$. Итак, найдутся ровно 10 индексов i с такими свойствами.

Рассмотрим любого мальчика $M = K_s$, образующего с D хорошую пару; тогда $d_s = 0$ и $d_{s-1} = 1$. Аналогично получаем, мальчик M образует хорошую пару с K_i ровно тогда, когда $d_s = d_{i-1}$ и K_i — девочка (то есть $d_{i-1} = 0$ и $d_i = 1$).

Заметим, что любые два числа d_i и d_{i+1} отличаются на единицу. Разобьём их на группы последовательных чисел, не меньших единицы, и группы последовательных чисел, не бо́льших нуля. Тогда при обходе круга по часовой стрелке «переходов» из первых групп во вторые будет столько же, сколько и «переходов» из вторых групп в первые. Значит, у M столько же хороших напарниц, сколько у D хороших напарников. Это и требовалось доказать.

Замечание 1. Это решение можно визуализировать, нарисовав «график» последовательности (d_i) (см. рис. 7). Тогда

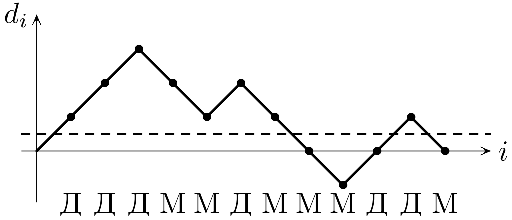

Рис. 7

появление хорошего напарника у D означает, что график пересекает прямую $d = 1/2$ сверху вниз, а появление хорошей напарницы у M — пересечение той же прямой снизу вверх.

Замечание 2. Из решения следует, что, если девочка образует хорошую пару с двумя мальчиками, то любая девочка, образующая хорошую пару с одним из этих мальчиков, образует её и с другим. Более того, все дети разбиваются на непересекающиеся группы (в каждой группе поровну мальчиков и девочек) так, что каждый мальчик образует хорошие пары со всеми девочками из своей группы и только с ними, и то же верно для любой девочки. При этом, при обходе по кругу мальчики и девочки из одной группы чередуются.

Существуют решения, доказывающие этот факт напрямую (например, индукцией по числу детей).

11.8. Натуральное число N представляется в виде $N = a_1 - a_2 = b_1 - b_2 = c_1 - c_2 = d_1 - d_2$, где a_1 и a_2 — квадраты, b_1 и b_2 — кубы, c_1 и c_2 — пятые степени, а d_1 и d_2 — седьмые степени натуральных чисел. Обязательно ли среди чисел a_1, b_1, c_1 и d_1 найдутся два равных? (*А. С. Голованов*)

Ответ. Нет, не обязательно.

Решение. Приведём пример числа N, для которого все указанные числа будут различными. Положим

$$N = (3^2 - 2^2)^{105}(3^3 - 2^3)^{70}(3^5 - 2^5)^{126}(3^7 - 2^7)^{120}.$$

Тогда

$$N = M_2^2(3^2 - 2^2) = M_3^3(3^3 - 2^3) = M_5^5(3^5 - 2^5) = M_7^7(3^7 - 2^7)$$

при некоторых натуральных M_2, M_3, M_5 и M_7, не делящихся ни на 2, ни на 3. Отсюда

$N = (3M_2)^2 - (2M_2)^2 = (3M_3)^3 - (2M_3)^3 =$

$$= (3M_5)^5 - (2M_5)^5 = (3M_7)^7 - (2M_7)^7.$$

Даже все восемь чисел, участвующих в представлениях, различны, поскольку у любых двух из них разная степень вхождения либо двойки, либо тройки.

Замечание. Подобный пример можно построить из следующих соображений (все упоминающиеся числа — натуральные). Рассмотрим какие-нибудь числа вида $K_2 = x_1^2 - x_2^2$, $K_3 = y_1^3 - y_2^3$, $K_5 = z_1^5 - z_2^5$ и $K_7 = t_1^7 - t_2^7$. Чтобы, скажем, получить число, представимое в виде разности как третьих, так и пятых степеней, достаточно взять число, имеющее вид K_3A^3 и одновременно K_5B^5. Значит, подойдёт число вида $K_3^\alpha K_5^\beta$, где α делится на 5 и даёт остаток 1 при делении на 3, а β делится на 3 и даёт остаток 1 при делении на 5.

Аналогично, чтобы получить число, требуемое в задаче, достаточно взять число $K_2^{\alpha_2}K_3^{\alpha_3}K_5^{\alpha_5}K_7^{\alpha_7}$, где α_2 даёт остаток 1 при делении на 2 и делится на $3 \cdot 5 \cdot 7$, а остальные показатели обладают аналогичными свойствами. Доказать существование таких показателей можно разными способами — в частности, неконструктивно, с использованием китайской теоремы об остатках. После этого нужно ещё проверить, что полученные степени различны.

Комментарий. Приведён (возможно, неконструктивно) пример требуемого числа, но не обосновано, что все полученные степени различны — не менее 4 баллов.