

Решения и система оценивания

Задача 1

Гоночный автомобиль движется по виражу – участку дороги, на котором реализован поворот с наклоном дорожного полотна, причём внешняя сторона полотна находится выше, чем внутренняя. Оказалось, что для некоторого виража радиусом $R = 500$ м и с углом наклона полотна дороги к горизонту $\alpha = 30^\circ$ максимальная скорость, с которой автомобиль может проехать этот поворот, составила $v_0 = 360$ км/ч. Определите, чему равнялась бы максимальная скорость в случае, если бы дорожное полотно на повороте было уложено без наклона. Ускорение свободного падения считайте равным $g = 10$ м/с², радиус виража измеряется в горизонтальной плоскости.

Решение

При движении в повороте на автомобиль действуют три силы: сила тяжести $m\vec{g}$, сила реакции опоры \vec{N} и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$. В обоих случаях скорость автомобиля будет максимальна, когда сила трения равна по модулю μN и направлена внутрь поворота. В первом случае запишем второй закон Ньютона для автомобиля в проекции на горизонтальную ось Ox и вертикальную ось Oy (рис. А):

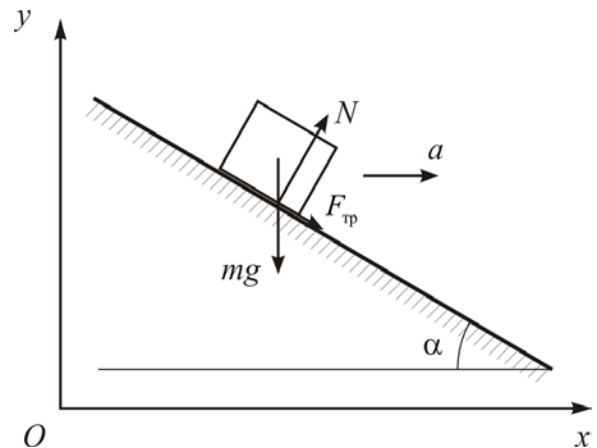


Рис. А

$$N \sin \alpha + \mu N \cos \alpha = ma = m \frac{v_0^2}{R},$$

$$N \cos \alpha - \mu N \sin \alpha - mg = 0.$$

Из записанных уравнений найдём:

$$N = \frac{mg}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha},$$

$$mg \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} = m \frac{v_0^2}{R},$$

откуда

$$\mu = \frac{v_0^2 - gR \operatorname{tg} \alpha}{gR + v_0^2 \operatorname{tg} \alpha}.$$

Во втором случае наклона нет. Запишем второй закон Ньютона для автомобиля в проекции на горизонтальную ось Ox и вертикальную ось Oy (рис. Б):

$$\mu N = m \frac{v_1^2}{R},$$

$$N - mg = 0.$$

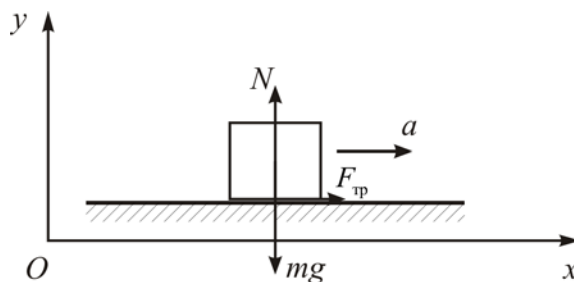


Рис. Б

Из записанных уравнений получим:

$$v_1 = \sqrt{\mu g R}.$$

Подставим полученное ранее выражение для коэффициента трения, получим

$$v_1 = \sqrt{\mu g R} = \sqrt{\frac{v_0^2 - gR \operatorname{tg} \alpha}{gR + v_0^2 \operatorname{tg} \alpha}} gR \approx 57,5 \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 207 \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Критерии оценивания

- Указано, чему равна сила трения **2 балла**
 Найден коэффициент трения из первого случая **4 балла**
 Записана связь между коэффициентом трения и скоростью во втором случае
 **2 балла**
 Получен ответ..... **2 балла**

Максимально за задачу – 10 баллов.

Задача 2

На рис. 1а и 1б представлены графики двух циклических процессов, совершаемых над идеальным газом (p и V – давление и объём газа, T – его абсолютная температура). Определите, во сколько раз работа газа в процессе ABCDA больше работы газа в процессе EHGFE, если количество газа в обоих процессах одинаковое. Известно, что $T_2 = 2T_1$ и $T_1 = 2T_3$.

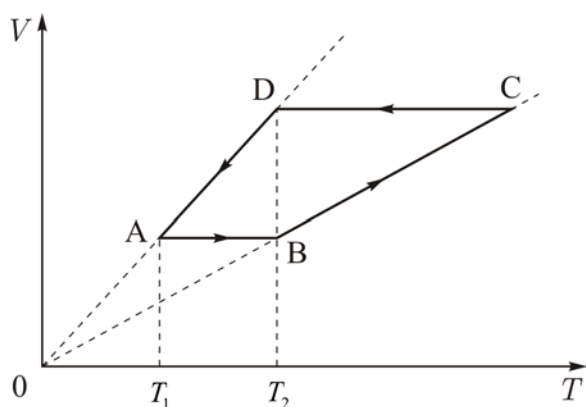


Рис. 1а

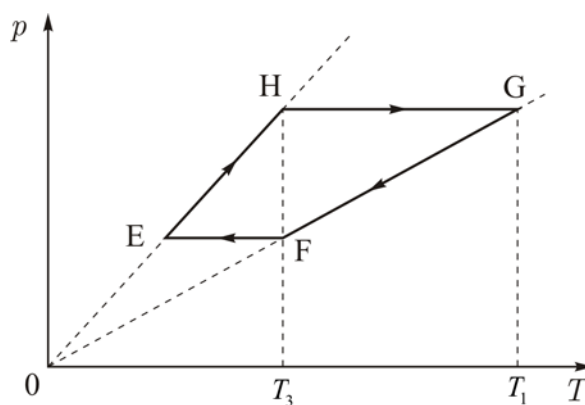


Рис. 1б

Решение

Заметим, что оба процесса в координатах (p, V) являются прямоугольниками, поэтому работу каждого процесса можно найти, как $A = \Delta p \Delta V$.

Работа в цикле ABCDA равна

$$A_1 = (p_B - p_A)(V_D - V_A) = p_A V_A \left(\frac{p_B}{p_A} - 1 \right) \left(\frac{V_D}{V_A} - 1 \right),$$

Процесс А–В является изохорным, процесс D–A – изобарным. В каждом из них отношение давлений (объёмов) равно отношению температур. Воспользуемся этим и запишем работу для первого случая через температуры

$$A_1 = p_A V_A \left(\frac{p_B}{p_A} - 1 \right) \left(\frac{V_D}{V_A} - 1 \right) = p_A V_A \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right).$$

Воспользуемся уравнением состояния идеального газа

$$A_1 = p_A V_A \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right) = \nu R T_1 \left(\frac{T_2}{T_1} - 1 \right)^2.$$

Аналогично для второго цикла:

$$\begin{aligned} A_2 &= (p_G - p_F)(V_G - V_H) = p_G V_G \left(1 - \frac{p_F}{p_G} \right) \left(1 - \frac{V_H}{V_G} \right) = p_G V_G \left(1 - \frac{T_3}{T_1} \right) \left(1 - \frac{T_3}{T_1} \right) = \\ &= \nu R T_1 \left(1 - \frac{T_3}{T_1} \right)^2. \end{aligned}$$

Найдём отношение работ:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{T_1}{T_1} \cdot \frac{\left(\frac{T_2}{T_1} - 1\right)^2}{\left(1 - \frac{T_3}{T_1}\right)^2} = 4.$$

Критерии оценивания

- Указан верный способ найти работу в циклических процессах..... **3 балла**
Используется факт, что для всех процессов отношение температур равно отношению давлений (для изохорных) либо объёмов (для изобарных)..... **1 балл**
Используется уравнение состояния, чтобы перейти от давлений и объёмов к температуре **1 балл**
Получено выражение для работы A_1 **2 балла**
Получено выражение для работы A_2 **2 балла**
Получен ответ..... **1 балл**

Максимально за задачу – **10 баллов**.

Задача 3

Найдите сопротивление электрической цепи, схема которой изображена на рис. 2. $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 30$ Ом.

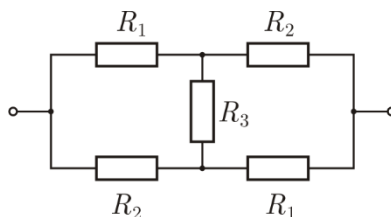


Рис. 2

Решение

Поскольку схема обладает симметрией, то и распределение токов в ней будет обладать той же симметрией (рис. 2а).

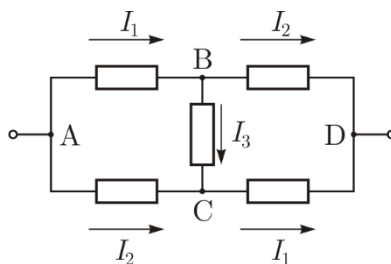


Рис. 2а

Запишем для узла B первое правило Кирхгофа:

$$I_1 = I_3 + I_2, \text{ откуда } I_3 = I_1 - I_2.$$

Сумма падений напряжений на участках AB и BD равна полному напряжению U , приложенному к цепи: $I_1 R_1 + I_2 R_2 = U$.

Запишем второе правило Кирхгофа для контура $ABCA$:

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 - I_2 R_2 = 0.$$

Подставив в это уравнение выражение для силы тока I_3 , найдём:

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_3}.$$

Полная сила тока, втекающего в цепь: $I = I_1 + I_2$.

Зная отношение I_1/I_2 , выразим эти силы токов через I :

$$I_1 = \frac{R_2 + R_3}{R_1 + R_2 + 2R_3} I; \quad I_2 = \frac{R_1 + R_3}{R_1 + R_2 + 2R_3} I.$$

Подставив полученные уравнение в выражение для U , получим:

$$\left(\frac{R_1(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + 2R_3} + \frac{R_2(R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + 2R_3} \right) I = U,$$

откуда сопротивление цепи

$$R = \frac{U}{I} = \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3 + 2R_1 R_2}{R_1 + R_2 + 2R_3} \approx 14,4 \text{ Ом.}$$

Критерии оценивания

Показано, что силы токов, текущих через участки AB и CD , равны..... **1 балл**

Показано, что силы токов, текущих через участки AC и BD , равны..... **1 балл**

Записано первое правило Кирхгофа, связывающее силы токов I_1, I_2, I_3 ... **2 балла**

Найдена сила тока I_1 **2 балла**

Найдена сила тока I_2 **2 балла**

Получен ответ..... **2 балла**

Максимально за задачу – 10 баллов.

Задача 4

На рис. 3 изображена схема электрической цепи, состоящей из источника постоянного напряжения U_0 , конденсаторов ёмкостью C , идеального вольтметра и идеального амперметра. В начальный момент времени ключ K разомкнут, а конденсаторы не заряжены. Ключ K замыкают и ждут зарядки конденсаторов. Определите, чему будут равны следующие величины:

- 1) показания вольтметра U_V ;
- 2) заряд q , который протёк через амперметр;
- 3) суммарная энергия W , которая запасена во всех конденсаторах.

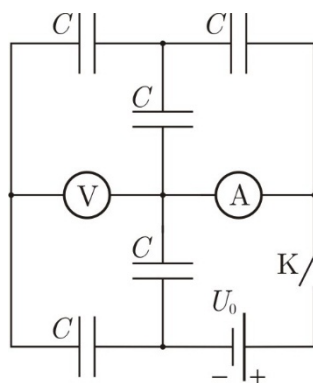


Рис. 3

Решение

Перерисуем схему после замыкания ключа (рис. 3а). Напряжение $U_3 = U_0$.

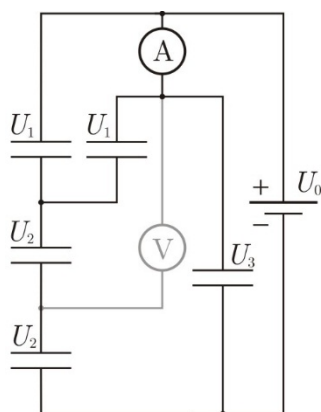


Рис. 3а

Напряжение на двух конденсаторах одинаково и равно некоторой величине U_1 , потому что эти конденсаторы соединены параллельно. Напряжение на двух других конденсаторах одинаково и равно некоторой величине U_2 , потому что

они соединены последовательно и через них после замыкания ключа протёк одинаковый заряд.

Заряд, который протёк через конденсаторы с напряжением U_1 , протёк и через конденсаторы с напряжением U_2 , отсюда можно найти связь между этими напряжениями:

$$2CU_1 = CU_2, \quad \text{следовательно,} \quad U_2 = 2U_1.$$

На левой ветви цепи суммарно должно быть напряжение U_0 :

$$U_1 + 2U_1 + 2U_1 = U_0, \quad \text{отсюда} \quad U_1 = \frac{U_0}{5}.$$

Теперь можно ответить на вопросы задачи:

1. Напряжение на вольтметре:

$$U_V = U_1 + U_2 = 3U_1 = \frac{3}{5}U_0.$$

2. Заряд, протёкший через амперметр:

$$q = CU_1 + CU_3 = \frac{6}{5}CU_0.$$

3. Суммарную энергию всех конденсаторов удобно подсчитать, представив всю цепь как один эквивалентный конденсатор, заряженный до напряжения $U' = U_0$, через который протёк заряд $q' = C(U_2 + U_3) = \frac{7}{5}CU_0$:

$$W = \frac{q'U'}{2} = \frac{7}{10}CU_0^2.$$

Критерии оценивания

Удалось нарисовать правильную эквивалентную схему (не обязательно, как у автора, но упрощающую понимание задачи).....	1 балл
Указано, что напряжение $U_3 = U_0$	1 балл
Используется, что у двух конденсаторов напряжение U_1	1 балл
Используется, что у двух конденсаторов напряжение U_2	1 балл
Получено, что $U_2 = 2U_1$	1 балл
Получено, что $U_1 = U_0/5$ или что $U_2 = 2U_0/5$	1 балл
Найдено напряжение U_V	1 балл
Найдён заряд q	1 балл
Найдена суммарная энергия конденсаторов W	2 балла

Максимально за задачу – 10 баллов.

Задача 5

Шерлок Холмс идёт вдоль многоэтажного дома по дороге, параллельной одной из его стен. Шерлок не видит солнце, но зато видит его отражение в панельных окнах 15-го этажа, причём пока Холмс сделал 370 шагов, солнце прошло слева направо через 40 окон. Посмотрев на землю, Холмс заметил, что длина его тени равна 2,5 м, причём тень перпендикулярна дороге. Сделав все эти измерения, Холмс повернулся на 90 градусов и по прямой дорожке подошёл к дому – теперь он насчитал 120 шагов. Внутри дома Шерлок измерил высоту от пола до потолка – 3 м и ширину комнаты, единственное окно которой выходит на сторону дороги, где он прогуливался – 5 м. Сделав все необходимые вычисления, Холмс определил толщины стен и межэтажных перекрытий в здании. Вычислите их вслед за сыщиком.

Указание. Разумеется, Холмс знал длину своего шага и рост: 60 см и 190 см соответственно. Погрешности великого сыщика не интересуют. Панельными называются окна, которые занимают в комнате всю стену целиком.

Решение

1. Во-первых, расстояние пройденное сыщиком вдоль дома вследствие прямолинейного распространения света равно расстоянию между крайними окнами, в которых он видит отражение. Отсюда расстояние между соседними окнами равно:

$$S = \frac{370 \text{ шагов} \cdot 0,6 \frac{\text{м}}{\text{шаг}}}{40} = 5,55 \text{ м.}$$

S равно сумме ширины комнаты и ширины стены. Выходит, толщина стен составляет $d_1 = 5,55 \text{ м} - 5 \text{ м} = 55 \text{ см}$.

2. Высота 15-го этажа определяется из рассмотрения подобных треугольников, образуемых: один – телом сыщика, наблюдаемым им отражённым лучом света и проекцией этого луча на горизонтальную плоскость, а другой – лучом, его проекцией и стеной дома.

Из подобия

$$H = 1,90 \text{ м} \cdot \frac{120 \text{ шагов} \cdot 0,6 \frac{\text{м}}{\text{шаг}} + 2,5 \text{ м}}{2,5 \text{ м}} = 56,62 \text{ м.}$$

Высота одного этажа с перекрытием составит: $h = \frac{H}{15} \approx 3,77 \text{ м}$.

Вычитая высоту комнаты, получим толщину межэтажных перекрытий:

$$d_2 = 3,77 \text{ м} - 3 \text{ м} = 77 \text{ см.}$$

Критерии оценивания

Указано, что перемещение сыщика вдоль дома равно перемещению отражения солнца	1 балл
Найдено расстояние между соседними окнами	2 балла
Найдена толщина стен	1 балл
Для нахождения высоты 15 этажа используется подобие соответствующих треугольников (в работе имеется рисунок либо словесное описание)	2 балла
Найдена высота одного этажа	2 балла
Найдена толщина межэтажных перекрытий	2 балла

Максимально за задачу – 10 баллов.

Максимальный балл за всю работу – 50.
--