11 класс

11.1. Не используя калькулятора, определите знак числа

$$(\cos(\cos 1) - \cos 1)(\sin(\sin 1) - \sin 1).$$

Ответ: отрицательное число.

Решение. Функция $y = \sin x$ возрастает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому из неравенства $0 < \sin 1 < 1 < \frac{\pi}{2}$ следует, что $\sin(\sin 1) < \sin 1$, то есть $\sin(\sin 1) - \sin 1 < 0$. Функция $y = \cos x$ убывает на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, поэтому из неравенства $0 < \cos 1 < 1 < \frac{\pi}{2}$ следует, что $\cos(\cos 1) > \cos 1$, то есть $\cos(\cos 1) - \cos 1 > 0$.

Таким образом, $(\cos(\cos 1) - \cos 1)(\sin(\sin 1) - \sin 1) < 0$.

Критерии проверки

$+$ *приведено полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведено верное, в целом, решение, но в обоснованиях имеются незначительные пробелы*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

11.2. Какое наименьшее количество множителей требуется вычеркнуть из числа $99! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 99$ так, чтобы произведение оставшихся множителей оканчивалось на 2?

Ответ: 20 множителей.

Решение. Из числа 99! необходимо вычеркнуть все множители кратные 5, иначе произведение будет оканчиваться на 0. Всего таких множителей (оканчивающихся на 0 или на 5) — 19.

Произведение оставшихся множителей оканчивается на 6. Действительно, так как произведение $1\times2\cdot3\cdot4\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9$ оканчивается на 6, то аналогичные произведения в каждом следующем десятке также оканчиваются на 6. Следовательно, вычеркнуть 19 множителей недостаточно. А 20 достаточно. Если вычеркнуть еще число, оканчивающееся на 3 или на 8, то произведение чисел в соответствующем десятке будет оканчиваться на 2. Произведение этого числа на число, оканчивающееся на 6, также оканчивается на 2.

Критерии проверки

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и верное, в целом, решение, но в обоснованиях имеются незначительные пробелы*

$\mp$ *приведены верный ответ и верный пример, но не объяснено, почему указанное количество вычеркнутых множителей — наименьшее*

$\mp$ *приведен верный ответ, но в рассуждениях неверно указаны какие-то из вычеркиваемых чисел*

$\mp$ *верный ход решения, но допущена ошибка, повлиявшая на ответ*

$\mp$ *приведена оценка без примера*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

11.3. Существует ли тетраэдр $ABCD$, в котором $AB = AC = AD = BC$, а суммы плоских углов при каждой из вершин B и C равны по $150°$?

Ответ: нет, не существует.

Решение. Предположим, что такой тетраэдр существует. Тогда его грани DAB и DAC — равнобедренные треугольники. Пусть $\angle ADB = \angle ABD = \alpha$, $\angle DBC = \beta$, $\angle DCB = \gamma$, $\angle ADC = \angle ACD = \delta$, тогда $\angle BDC = 180° - \beta - \gamma$ (см. рис. 11.3).

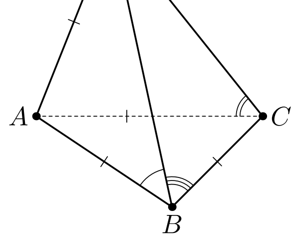

Рис. 11.3

Так как треугольник ABC — равносторонний, то из условия задачи следует, что $\alpha+\beta = \gamma+\delta = 90°$, значит, $\alpha+\beta+\gamma+\delta = 180°$. Тогда $\angle BDC = 180° - \beta - \gamma = \alpha+\delta$, то есть $\angle BDC = \angle BDA + \angle CDA$. Это противоречит свойству трехгранного угла: в любом трехгранном угле сумма двух плоских углов больше третьего. Полученное противоречие показывает, что тетраэдра, удовлетворяющего условию, не существует.

Критерии проверки

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение*

$\pm$ *приведены верный ответ и верное, в целом, решение, но в обоснованиях имеются незначительные пробелы*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

Указанное выше свойство трехгранного угла достаточно сформулировать. Наличие или отсутствие его доказательства в работе школьника не влияет на оценку решения.

11.4. При каких значениях x и y верно равенство

$$x^2 + (1-y)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3}?$$

Ответ: при $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$.

Решение. *Первый способ.* После раскрытия скобок и приведения подобных слагаемых получим:

$$x^2 + (1-y)^2 + (x-y)^2 = \frac{1}{3} \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + \frac{2}{3} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(4x^2 - 4xy + y^2) + \frac{3}{2}\left(y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}(2x-y)^2 + \frac{3}{2}\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x - y = 0, \\ y - \frac{2}{3} = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x = \frac{1}{3}, \\ y = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Второй способ. Перепишем уравнение в виде: $x^2 - yx + \left(y^2 - y + \frac{1}{3}\right) = 0$ и рассмотрим его как квадратное уравнение относительно x. Тогда $D = y^2 - 4y^2 + 4y - \frac{4}{3} = -3y^2 + 4y - \frac{4}{3} = -3\left(y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{4}{9}\right) = -3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2$. Квадратное уравнение имеет корни, если $D = -3\left(y - \frac{2}{3}\right)^2 \geqslant 0$, то есть, если $y = \frac{2}{3}$. Подставив это значение в исходное уравнение, получим, что $x = \frac{1}{3}$.

Третий способ. Используя неравенство между средним квадратичным и средним арифметическим (для неотрицательных чисел) и тот факт, что $|a| \geqslant a$, получим:

$$\sqrt{\frac{x^2 + (1-y)^2 + (x-y)^2}{3}} \geqslant \frac{|x| + |1-y| + |x-y|}{3} \geqslant \frac{x + (1-y) + (y-x)}{3} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно, $x^2 + (1-y)^2 + (x-y)^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

Равенство достигается тогда и только тогда, когда $x = 1 - y = y - x$, то есть при $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$.

Четвертый способ. Пусть $a = x$, $b = 1 - y$, $c = y - x$, тогда $a + b + c = 1$ и $a^2 + b^2 + c^2 = \frac{1}{3}$.

Рассмотрим векторы: $\vec{m}(a; b; c)$, $\vec{n}(1; 1; 1)$. Их модули: $\left|\vec{m}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\vec{n} = \sqrt{3}$.

Таким образом, $\vec{m} \cdot \vec{n} = \left|\vec{m}\right| \cdot \left|\vec{n}\right|$, следовательно, рассматриваемые векторы коллинеарны. Тогда их координаты пропорциональны: $\frac{a}{1} = \frac{b}{1} = \frac{c}{1}$, то есть $a = b = c = \frac{1}{3}$. Значит, $x = 1 - y = y - x$, значит, $x = \frac{1}{3}$, $y = \frac{2}{3}$.

Критерии проверки

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение (любым из способов)*

$\pm$ *приведены верный ответ и верное, в целом, решение, но в обоснованиях имеются незначительные пробелы*

$\mp$ *приведен верный ход решения, но допущены ошибки, которые привели к неверному ответу*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*

11.5. Дан остроугольный треугольник ABC. Окружности с центрами A и C проходят через точку B, вторично пересекаются в точке F и пересекают описанную около треугольника ABC окружность w в точках D и E. Отрезок BF пересекает окружность w в точке O. Докажите, что O — центр описанной окружности треугольника DEF.

Решение. *Первый способ.* Докажем сначала, что $OE = OF$. Для этого не нужна окружность с центром в точке A. Рассмотрим чертеж без нее (см. рис 11.5а). Пусть в окружности с центром C центральный угол BCE равен 2α. Тогда вписанный угол EFB равен α.

В окружности ω углы BCE и BOE — вписанные и опираются на одну дугу, значит, $\angle BOE = \angle BCE = 2\alpha$. Угол BOE — внешний угол треугольника EOF. Следовательно, $\angle OEF = \angle BOE - \angle OFE = \alpha$, то есть треугольник EOF — равнобедренный: $OE = OF$.

Аналогично, рассмотрев окружность с центром A, доказывается, что $OF = OD$. Следовательно, O — центр описанной окружности треугольника DEF.

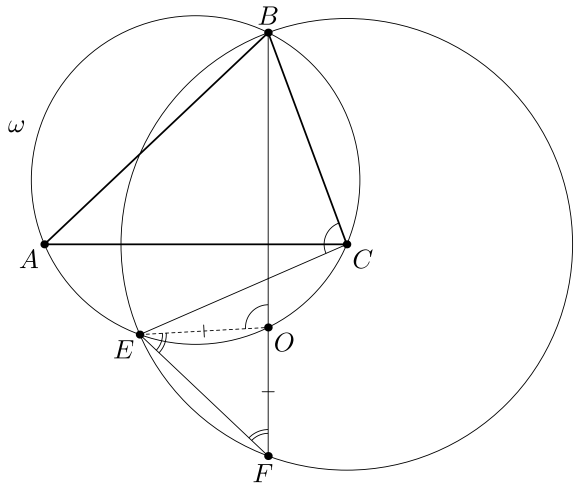

Рис. 11.5а

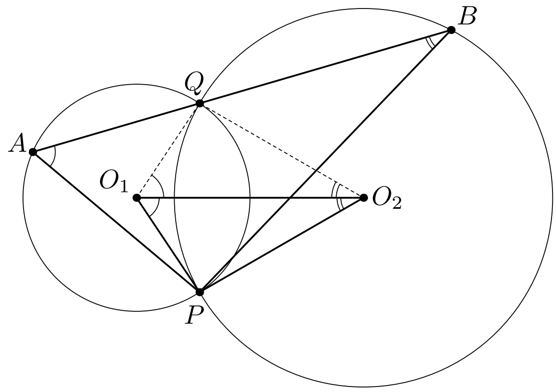

Рис. 11.5б

Второй способ. **Лемма.** Пусть окружности с центрами O_1 и O_2 пересекаются в точках P и Q. Через точку Q проведена прямая, вторично пересекающая окружности в точках A и B соответственно. Тогда треугольники PO_1O_2 и PAB подобны.

Доказательство. Возможны два случая взаимного расположения точек Q, A и B (см. рис. 11.5 б. в), но доказательство от этого не зависит. Пусть $\angle QBP = \beta$, тогда $\angle QO_2P = 2\beta$. Луч O_2O_1 является биссектрисой угла QO_2P. Следовательно, $\angle O_1O_2P = \beta = \angle QBP$. Аналогично, $\angle O_2O_1P = \angle QAP$. Таким образом, треугольники PO_1O_2 и PAB подобны.

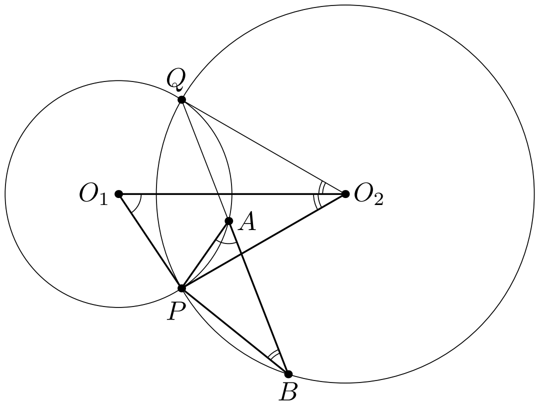

Рис. 11.5в

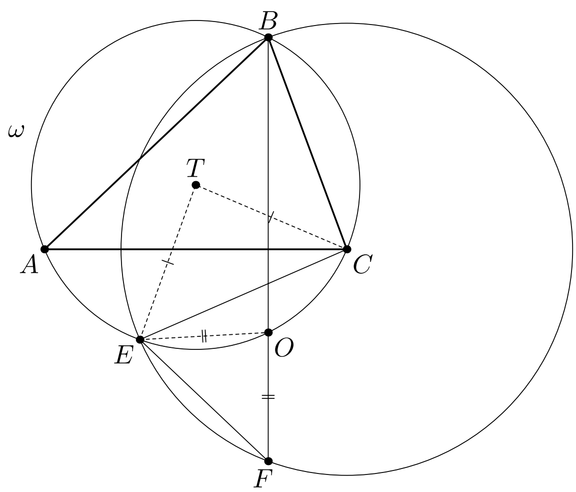

Рис. 11.5г

Перейдем теперь к решению задачи. Докажем сначала, что $OE = OF$. Для этого опять рассмотрим чертеж без окружность с центром в точке A (см. рис. 11.5г).

Пусть T — центр окружности ω, описанной около треугольника ABC. Тогда по лемме треугольники EOF и ETC подобны. Треугольник ETC — равнобедренный: $ET = TC$. Следовательно, треугольник EOF — также равнобедренный: $EO = OF$, что и требовалось.

Аналогично доказывается, что $OF = OD$. Следовательно, O — центр описанной окружности треугольника DEF.

Критерии проверки

+ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение* (*любым из способов*)

$\pm$ приведены верный ответ и верное, в целом, решение, но в обоснованиях имеются незначительные пробелы

$\mp$ в работе есть верная идея решения, но до конца оно не доведено

$-$ задача не решена или решена неверно

Лемма о подобии может быть использована без доказательства только при условии, что она сформулирована в явном виде.

11.6. На экране компьютера сгенерирована некоторая конечная последовательность нулей и единиц. С ней можно производить следующую операцию: набор цифр «01» заменять на набор цифр «1000». Может ли такой процесс замен продолжаться бесконечно или когда-нибудь он обязательно прекратится?

Ответ: процесс обязательно прекратится.

Решение. *Первый способ.* Пусть исходная последовательность содержит n единиц, тогда ее удобно записать в виде: $\underbrace{0\ldots0}_{a_1}1\underbrace{0\ldots0}_{a_2}1\ldots1\underbrace{0\ldots0}_{a_n}1\underbrace{0\ldots0}_{a_{n+1}}$, где числа a_1, a_2, ..., a_n, a_{n+1} обозначают количество нулей, стоящих слева от самой левой единицы, между соседними единицами, и после самой правой единицы соответственно (какие-то из этих чисел могут быть равны нулю). Заметим, что указанная операция не изменяет количество единиц в последовательности, поэтому замена «01» на «1000» означает, что слева от некоторой единицы на один нуль стало меньше, а справа — стало на три нуля больше. Заметим также, что количество возможных операций зависит от количества единиц, суммарного количества нулей, стоящих левее каждой единицы, и количества нулей, возникших в результате выполнения всех операций. Оно не зависит от порядка выполнения операций, так как если две единицы оказались рядом, то с правой единицей указанную операцию выполнить невозможно (относительный порядок единиц в последовательности не изменяется).

Таким образом, с участием самой левой единицы можно провести a_1 операций, с участием следующей единицы — $(3a_1 + a_2)$ операции, с участием следующей единицы — $3(3a_1 + a_2) + a_3$ операции, и так далее, с участием самой правой единицы — $(3^{n-1}a_1 + 3^{n-2}a_2 + \ldots + 3a_{n-1} + a_n)$ операций.

Так как с каждой из единиц можно совершить конечное количество операций, то и со всем набором можно совершить только конечное количество операций.

Отметим, что указывать точное количество операций необязательно — важно показать, что их конечное число. Например, решение можно было завершить следующим образом:

Если левее некоторой единицы расположено x нулей, а правее y нулей, то с этой единицей можно совершить не более x операций, при этом правее этой единицы окажется не более $3x + y$ нулей. То есть, если непосредственно левее какой-либо единицы расположено конечное количество нулей, то с этой единицей можно сделать конечное количество операций и правее нее образуется конечное количество нулей.

Таким образом, с участием первой единицы можно провести a_1 (конечное количество) операций, а правее нее образуется $3a_1 + a_2$ (конечное количество) нулей. Аналогично, с участием второй единицы можно провести конечное количество операций, а правее нее образуется конечное количество нулей. И так далее, с каждой очередной единицей можно совершить конечное количество операций, а, значит, со всей последовательностью можно совершить конечное количество операций.

Второй способ. Каждую операцию можно понимать как «ход» какой-то единицы: единица меняется местами со стоящим перед нею нулём, а потом после нуля появляются ещё два нуля. Пусть ежеминутно делается один такой ход, и процесс продолжается бесконечно долго. Тогда найдутся единицы, которые «ходили» бесконечное число раз. Рассмотрим самую левую из них и покрасим её в красный цвет. Все единицы левее красной через несколько минут перестанут перемещаться. После этого красная единица каждым своим ходом будет перемещаться ближе к началу последовательности, то есть сделает ещё лишь конечное число ходов, что противоречит тому, как мы её выбрали.

Третий способ. Припишем каждому нулю «вес». Нули, стоящие после последней единицы пусть имеют «вес» 0, стоящие между последней и предпоследней — «вес» 1, и далее по формуле $1 + 3 + \ldots + 3^{k-1} = \frac{3^k - 1}{2}$, где k — количество стоящих после этого нуля единиц. При указанной операции с единицей, после которой стоит еще k единиц, ноль «веса» $\frac{3^{k+1} - 1}{2}$ заменяется на три нуля «веса» $\frac{3^k - 1}{2}$. Суммарный «вес» всех нулей при этом уменьшается на $\frac{3^{k+1} - 1}{2} - 3 \cdot \frac{3^k - 1}{2} = \frac{3^{k+1} - 1 - 3^{k+1} + 3}{2} = 1$.

Так как суммарный «вес» всех нулей может быть только целым неотрицательным числом, процесс не может продолжаться бесконечно.

Из решения следует, что наибольшее возможное количество операций равно изначальному суммарному весу нулей, который равен $a_n + a_{n-1} \cdot 4 + \ldots + a_1 \cdot \frac{3^{n-1}-1}{2}$*, где* a_1 *— количество нулей, стоявших в исходной последовательности перед самой первой единицей,* a_2 *— между первой и второй и т.д. Между двумя последними единицами находилось* a_n *нулей, а нули после последней единицы ни в каких операциях не участвуют.*

Критерии проверки

$+$ *приведены верный ответ и полное обоснованное решение (любым способом)*

$\pm$ *приведены верный ответ и верное, в целом, решение, но в обоснованиях имеются некоторые пробелы (например, в обосновании того, что количество операций не зависит от их порядка)*

$\pm$ *в подсчете максимального количества операций есть ошибка, но независимость количества операций от их порядка доказана строго*

$\mp$ *в работе есть верная идея решения, но до конца оно не доведено*

$\mp$ *приведен верный (или с ошибкой) подсчет максимального числа операций (или показано без подсчета, почему при определенном порядке действий оно конечно), но отсутствует утверждение, что оно не зависит от порядка действий. Либо это утверждение есть, но оно никак не обосновано*

$\mp$ *верный подсчет максимального числа операций проведен для конкретной последовательности. Независимость от порядка действий как-то пояснена*

$\mp$ *сформулировано, но не доказано утверждение, что при каждой операции единица сдвигается влево и в конце концов все единицы соберутся в начале*

$-$ *верный подсчет максимального числа операций проведен для конкретной последовательности. Независимость от порядка действий не доказана*

$-$ *приведен только ответ*

$-$ *задача не решена или решена неверно*