V МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, критерии оценки

1. *Каждый из 10 гномов — либо рыцарь, всегда говорящий правду, либо лжец, который всегда врёт, причём хотя бы один из гномов — рыцарь. Все гномы выстроились в шеренгу, после чего девятеро сказали: «Среди стоящих слева от меня есть рыцарь», а оставшийся, Глоин, сказал: «Среди стоящих справа от меня есть рыцарь». Правду сказал Глоин или солгал?* (И. Рубанов)

Ответ. Сказал правду. **Решение.** По условию, рыцари среди гномов есть. Возьмём самого левого из них. Он не мог сказать «Среди стоящих слева от меня есть рыцарь». Значит, это и есть Глоин, и, следовательно, он говорит правду.

Критерии. Ответ без обоснования — *0 баллов*. Приведение примера 10 гномов, удовлетворяющих условию задачи, не требуется, его наличие или отсутствие на оценку не влияет.

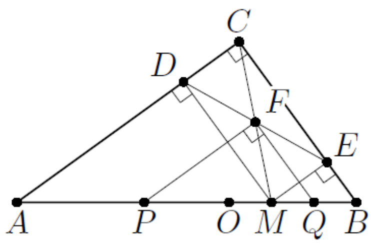
2. *На пути в музей группа детсадовцев построилась парами, причём количество пар из двух мальчиков было в три раза больше количества пар из двух девочек. На обратном пути та же группа построилась так, что количество пар из двух мальчиков было в четыре раза больше количества пар из двух девочек. Докажите, что эту же группу можно построить так, чтобы количество пар из двух мальчиков было в семь раз больше количества пар из двух девочек.* (И. Богданов)

Решение. Пусть количество пар девочек на пути в музей было a, а на обратном пути — b. Значит, количества пар мальчиков на пути туда и обратно были равны $3a$ и $4b$ соответственно. Поскольку каждая из остальных пар состояла из мальчика и девочки, разность между количествами мальчиков и девочек составляет $2(3a–a) = 2(4b–b)$, откуда $2a = 3b$, и b делится на 2, то есть $b = 2c$ при некотором целом c.

Рассмотрим теперь ситуацию на пути обратно, выберем в ней c пар мальчиков и c пар девочек и перестроим их в разнополые пары. Останется c пар девочек и $7c$ пар мальчиков, что и требовалось.

Критерии. Показано, только что разность между числом мальчиков и числом девочек делится на 12 (или эквивалентное утверждение) — *2 балла*. При некоторых подходах к решению, обозначив эту разность через $12c$, можно сделать вывод, что для получения требуемого построения достаточно составить c пар девочек и $7c$ пар мальчиков; если при этом не обосновано (и не очевидно), что такое возможно (то есть, что количество мальчиков не меньше $14c$ или количество девочек не меньше $2c$) — *4 балла*.

3. *На отрезке AB отмечена точка M. Точки P и Q — середины отрезков AM и BM соответственно, точка O — середина отрезка PQ. Выберем точку C так, чтобы угол ACB был прямым. Пусть MD и ME — перпендикуляры, опущенные из точки M на прямые CA и CB, а F — середина отрезка DE. Докажите, что длина отрезка OF не зависит от выбора точки C.* (Р. Женодаров)



Решение. Заметим, что $CDME$ — прямоугольник. Его диагонали делятся точкой пересечения пополам, поэтому точка F является серединой отрезка CM. Далее, отрезки PF и FQ — средние линии треугольников ACM и BCM соответственно. Значит, они параллельны взаимно перпендикулярным отрезкам AC и CB, то есть угол PFQ — прямой. Наконец, FO — медиана в прямоугольном треугольнике PFQ, проведённая к гипотенузе PQ. Так как точки P и Q фиксированы, длина $FO = PQ/2$ не зависит от выбора точки C, что и требовалось доказать.

Критерии. Показано, что угол PFQ — прямой, дальнейшего содержательного продвижения нет — *3 балла*. Показано только, что точки C, F, M лежат на одной прямой — *1 балл*. Не доведённое до конца вычислительное решение (например, методом координат), если по ходу его не получены явно какие-то полезные для решения геометрические факты, *оценивается в 0 баллов*.

4. *Существуют ли шесть различных натуральных чисел a, b, c, d, e, f таких, что справедливо равенство (a+b+c+d+e+f) : (1/a+1/b+1/c+1/d+1/e+1/f) = 2012?* (Б. Трушин)

Ответ. Да, существуют. **Решение**. Положим, например, $a = 1$, $b = 2012$, $c = 2$, $d = 1006$, $e = 4$, $f = 503$; тогда $ab = cd = ef = 2012$. Значит,

$$1/a+1/b+1/c+1/d+1/e+1/f = (a+b)/ab+(c+d)/cd+(e+f)/ef = (a+b+c+d+e+f)/2012,$$

откуда и следует требуемое равенство.

Критерии. Ответ «существуют» без примера или иного обоснования — *0 баллов*. Верный пример без обоснования его правильности — *5 баллов*. Пример, где есть равные числа — *0 баллов.*