

10 класс

Задача 1. Мешок и трение

Перед ударом о землю скорость мешочка равна v_0 и направлена под углом α к горизонту.

Во время соударения на мешочек действует вертикальная сила реакции опоры N и горизонтальная сила трения F . Если в течение всего удара выполняется равенство $F = \mu N$, то импульс, сообщённый мешочку силой трения, будет в μ раз больше импульса, сообщённого силой N :

$$P_N = mv_y = mv_0 \sin \alpha, \quad P_F = \mu P_N = \mu mv_0 \sin \alpha.$$

Отсюда можно найти скорость мешочка по окончании удара:

$$mu = mv_x - \mu mv_y, \quad u = v_0(\cos \alpha - \mu \sin \alpha).$$

При $\mu > \operatorname{ctg} \alpha$ скорость u в предположении $F = \mu N$ получается отрицательной. Это означает, что в этом случае горизонтальная скорость мешочка обратится в ноль ещё до окончания удара по вертикали, то есть мешочек сразу после удара будет неподвижен.

Таким образом, в этой задаче возможны два случая, требующие раздельного рассмотрения.

1. При $\operatorname{ctg} \alpha < \mu$ мешочек в результате удара останавливается, дальность полёта равна

$$L_1 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha. \quad \text{откуда} \quad L_{1 \max} = \frac{v_0^2}{g},$$

при этом максимальная дальность $L_{1 \max}$ достигается при $\alpha = 45^\circ$.

2. При $\operatorname{ctg} \alpha > \mu$ мешочек после удара некоторое время скользит по поверхности, проходя дополнительное расстояние. Полная дальность L_2 в этом случае складывается из дальности полёта l_1 и расстояния l_2 , пройденного мешочком по поверхности до остановки:

$$l_1 = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha, \quad l_2 = \frac{u^2}{2a},$$

где $u = v_0(\cos \alpha - \mu \sin \alpha)$, $a = \mu g$. Полная дальность L_2 равна:

$$\begin{aligned} L_2 = l_1 + l_2 &= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\alpha + \frac{v_0^2}{2\mu g} (\cos \alpha - \mu \sin \alpha)^2 = \\ &= \frac{v_0^2}{2\mu g} (4\mu \sin \alpha \cos \alpha + (\cos \alpha - \mu \sin \alpha)^2) = \frac{v_0^2}{2\mu g} (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)^2. \end{aligned}$$

Максимум выражения $\cos \alpha + \mu \sin \alpha$ достигается при $\operatorname{tg} \alpha = \mu$ и равен $\sqrt{\mu^2 + 1}$, поэтому для максимальной дальности во втором случае получаем

$$L_{2 \max} = \frac{v_0^2}{g} \frac{\mu^2 + 1}{2\mu}.$$

Этот результат можно получить проще, если заметить, что при выполнении условия $F = \mu N$ сумма сил трения и нормальной реакции всегда составляет с вертикалью угол φ такой, что $\operatorname{tg} \varphi = \mu$. По этой причине проекция мешочка на ось, составляющую угол φ с горизонтом движется равноускоренно с ускорением $a = -g \sin \varphi$ во время полёта, удара и скольжения. Отсюда легко находится максимальная дальность:

$$L \cos \varphi = \frac{(v_0 \cos(\alpha - \varphi))^2}{2g \sin \varphi}, \quad L = \frac{(v_0 \cos(\alpha - \varphi))^2}{g \sin 2\varphi},$$

$$L_{2 \max} = \frac{v_0^2}{g \sin 2\varphi} \text{ при } \alpha = \varphi.$$

Максимальная дальность во втором случае не меньше, чем в первом. Это означает, что если условие $\operatorname{tg} \alpha = \mu$ не противоречит условию $\operatorname{ctg} \alpha > \mu$, то есть при $\mu < 1$, максимальная дальность равна $L_{2 \max}$.

При $\mu > 1$ дальность L_2 монотонно растёт с увеличением угла α , поэтому её максимальное значение соответствует максимально возможному значению угла, которое определяется условием $\operatorname{ctg} \alpha = \mu$:

$$\begin{aligned} L_{2 \max} &= \frac{v_0^2}{2\mu g} (\cos \alpha + \mu \sin \alpha)^2 = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2\mu g} (\operatorname{ctg} \alpha + \mu)^2 = \\ &= \frac{v_0^2}{2\mu g} \frac{(\operatorname{ctg} \alpha + \mu)^2}{1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{v_0^2}{2\mu g} \frac{(2\mu)^2}{1 + \mu^2} = \frac{v_0^2}{g} \frac{2\mu}{1 + \mu^2} \leq \frac{v_0^2}{g} = L_{1 \max}. \end{aligned}$$

Поэтому при $\mu > 1$ максимально возможной будет дальность L_1 .

Окончательно:

$$L_{\max} = \begin{cases} \frac{v_0^2}{g} \frac{\mu^2 + 1}{2\mu}, & \text{при } \operatorname{tg} \alpha_{\max} = \mu, \text{ если } \mu \leq 1, \\ \frac{v_0^2}{g}, & \text{при } \alpha_{\max} = 45^\circ, \text{ если } \mu > 1. \end{cases}$$

Задача 2. Процессы в сосуде

Сосуд теплоизолирован, поэтому первое начало термодинамики выглядит так:

$$0 = \Delta U + p_0 \Delta V_2,$$

где p_0 — атмосферное давление снаружи подвижной перегородки, ΔV_2 — изменение объёма второго отсека.

Уравнение состояния газа во втором отсеке:

$$p_0 \Delta V_2 = \nu_2 R \Delta T_2.$$

Запишем первое начало термодинамики для каждого газа:

$$\Delta U_1 + \Delta U_2 + p_0 \Delta V_2 = \Delta U_1 + \frac{5}{2} \nu_2 R \Delta T_2 + p_0 \Delta V_2 = \Delta U_1 - \frac{7}{2} \Delta U = 0.$$

Отсюда получаем окончательный ответ:

$$\Delta U_1 = \frac{7}{2} \Delta U.$$

Задача 3. Два шарика

В критическом случае (при минимально возможной v_0) отрыв нижнего шарика произойдёт в момент, когда нить вертикальна и её натяжение равно mg (рис. 21). Скорость верхнего шарика v в этот момент горизонтальна, и из сохранения горизонтальной проекции импульса системы получаем, что скорость нижнего шарика равна по величине и противоположна по направлению скорости верхнего. Запишем закон сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = 2 \frac{mv^2}{2} + mgl,$$

откуда находим: $v^2 = v_0^2/2 - gl$.

В системе отсчёта (неинерциальной), в которой нижний шарик всё время неподвижен, верхний шарик движется по окружности радиуса l и его скорость в рассматриваемый момент равна $2v$, поэтому ускорение верхнего шарика направлено вниз и равно

$$a = \frac{(2v)^2}{l}.$$

Ускорение нижнего шарика в момент отрыва равно нулю, поэтому ускорение верхнего шарика относительно инерциальной системы отсчёта тоже равно $a = 4v^2/l$. Второй закон Ньютона для верхнего шарика:

$$m \frac{4v^2}{l} = mg + T.$$

Поскольку $T = mg$, то, $2v^2 = gl$, откуда, с учётом выражения для v , получим $v_0^2 = 3gl$.

Таким образом, нижний шарик оторвётся от плоскости при:

$$v_0 > \sqrt{3gl}.$$

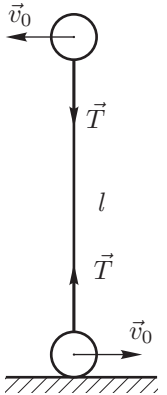
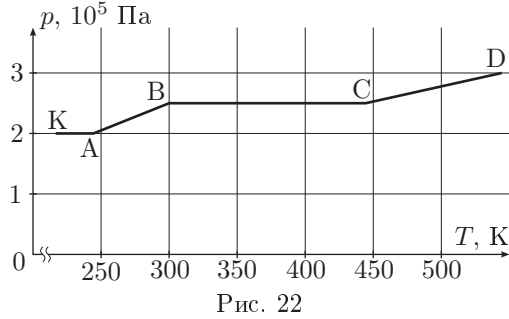


Рис. 21

Задача 4. Эксперимент



Теоретический вид зависимости давления от температуры для данной системы представлен на рисунке 22. Давление на участке КА:

$$p_{КА} = p_0 + \left(\frac{m_i}{S_i}\right)_{\min} g,$$

где $\left(\frac{m_i}{S_i}\right)_{\min}$ — меньшая из двух величин $\frac{m_1}{S_1}$ и $\frac{m_2}{S_2}$. (В дальнейшем для опре-

делённости будем считать меньшей $\frac{m_1}{S_1}$). На этом участке в цилиндре площади S_1 протекает изобарический процесс до момента поднятия поршня до упора (точка А на графике).

При дальнейшем увеличении температуры объём газа не меняется, а давление растёт вплоть до момента начала движения второго поршня (точка В). На участке АВ:

$$p_{AB} = \frac{\nu RT}{S_1 h}.$$

В точке В давление

$$p_B = p_0 + \frac{m_2 g}{S_2}.$$

При дальнейшем росте температуры давление не меняется до момента, когда второй поршень достигает верхнего положения (точка С).

Далее снова протекает изохорный процесс при объёме $(S_1 + S_2)h$, так что:

$$p_{CD} = \frac{\nu RT}{(S_1 + S_2)h}.$$

Заметим, что данные таблицы таковы, что

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{T_2}{T_3}, \quad \frac{p_4}{p_5} = \frac{T_4}{T_5}, \quad p_1 = p_2, \quad p_3 = p_4,$$

где p_i, T_i — давление и температура в Кельвинах в соответствующих ячейках таблицы. Значит, параметры во второй, третьей и четвёртой ячейках таблицы соответствуют точкам А, В, С. Тогда для участка АВ:

$$p_B - p_A = \frac{\nu R}{S_1 h}(T_B - T_A), \quad \text{откуда} \quad S_1 = 0,01 \text{ м}^2.$$

Массу m_1 найдём из уравнения:

$$p_A = p_0 + \frac{m_1 g}{S_1}, \quad \text{следовательно,} \quad m_1 = 100 \text{ кг}.$$

Аналогично:

$$S_1 + S_2 = \frac{\nu R(T_D - T_C)}{(p_D - p_C)h}, \quad \text{откуда} \quad S_2 = 0,005 \text{ м}^2, \quad m_2 = 75 \text{ кг}.$$

Задача 5. Электрическая цепь

1) Тепло Q_2 , выделившееся в схеме после размыкания ключа, равно энергии конденсатора в момент размыкания:

$$Q_2 = \frac{q_C^2}{2C}, \quad \text{откуда} \quad q_C = \sqrt{2CQ_2} = 2,00 \text{ мКл}.$$

Полное тепло равно работе источника:

$$\mathcal{E}q_{\mathcal{E}} = Q_1 + Q_2, \quad \text{откуда} \quad q_{\mathcal{E}} = \frac{Q_1 + Q_2}{\mathcal{E}} = 2,11 \text{ мКл}.$$

Через резистор R протёк заряд

$$q_R = q_{\mathcal{E}} - q_C = \frac{Q_1 + Q_2}{\mathcal{E}} - \sqrt{2CQ_2} = 0,11 \text{ мКл}.$$

2) При замкнутом ключе в произвольный момент времени справедливо следующее из второго правила Кирхгофа равенство:

$$\mathcal{E} = I_R R + I_r r.$$

Домножив его на малое время Δt , получим связь протекших за это время зарядов:

$$\mathcal{E} \Delta t = R I_R \Delta t + r I_r \Delta t = R \Delta q_R + r \Delta q_r.$$

Просуммировав подобные равенства за всё время до размыкания ключа, получим:

$$\mathcal{E} t = R q_R + r q_r,$$

откуда с учётом $q_r = q_{\mathcal{E}}$ получаем:

$$t = \frac{R q_R + r q_{\mathcal{E}}}{\mathcal{E}} = \frac{R + r}{\mathcal{E}^2} (Q_1 + Q_2) - \frac{R}{\mathcal{E}} \sqrt{2CQ_2} = 30,4 \text{ с}.$$