11 класс

11.1. Изначально на столе лежат 111 кусков пластилина одинаковой массы. За одну операцию можно выбрать несколько групп по одинаковому количеству кусков и в каждой группе весь пластилин слепить в один кусок. За какое наименьшее количество операций можно получить ровно 11 кусков, любые два из которых имеют различные массы? (*И. Богданов*)

Ответ. За две операции.

Решение. Пусть масса одного исходного куска равна 1. Если при первой операции в каждой группе k кусков, то после неё каждый кусок будет иметь массу 1 или k; значит, одиннадцати кусков различной массы за одну операцию получить не удастся.

Покажем, что за две операции требуемое сделать можно. На первой операции выберем 37 групп по 2 куска; после операции получатся по 37 кусков с массами 1 и 2. На второй операции выберем 9 групп по 8 кусков: в i-й группе ($1 \leqslant i \leqslant 9$) будет $i-1$

кусков массы 2 и $9-i$ кусков массы 1. Тогда останутся неиспользованными два куска масс 1 и 2, а из i-й группы получится кусок массы $9-i+2(i-1)=7+i$. Итак, получатся 11 кусков с массами 1, 2, 8, 9, …, 16, что и требовалось.

Замечание. Можно показать, что приведённый способ — единственный возможный.

11.2. Любые два из действительных чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 отличаются не менее, чем на 1. Оказалось, что для некоторого действительного k выполнены равенства

$$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=2k \quad \text{и} \quad a_1^2+a_2^2+a_3^2+a_4^2+a_5^2=2k^2.$$

Докажите, что $k^2 \geqslant 25/3$. (*И. Богданов*)

Решение. Без ограничения общности можно считать, что $a_1 < \ldots < a_5$. По условию, $a_{i+1}-a_i \geqslant 1$ при всех $i=1,2,3,4$. Значит, $a_j - a_i \geqslant j-i$ при всех $1 \leqslant i < j \leqslant 5$. Возведём каждое из полученных неравенств в квадрат и сложим их все. Получим

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}(a_j-a_i)^2 \geqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}(j-i)^2 = 4\cdot 1^2+3\cdot 2^2+2\cdot 3^2+4^2=50,$$

то есть

$$4\sum_{i=1}^{5} a_i^2 - 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} a_i a_j \geqslant 50. \qquad (1)$$

С другой стороны, по условию имеем

$$\sum_{i=1}^{5} a_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} a_i a_j = (a_1+\ldots+a_5)^2 = 4k^2. \qquad (2)$$

Складывая (1) и (2), получаем

$$5\sum_{i=1}^{5} a_i^2 = 10k^2 \geqslant 50+4k^2,$$

откуда $6k^2 \geqslant 50$, или $k^2 \geqslant 25/3$.

Замечание. Условию задачи удовлетворяют, например, числа $a_i=(3-i)+2/\sqrt{3}$, $k=5/\sqrt{3}$. Таким образом, число 25/3 в условии нельзя заменить на большее.

11.3. Клетчатая плоскость раскрашена в шахматном порядке в чёрный и белый цвета. Затем белые клетки снова раскрашены в красный и синий цвета так, чтобы клетки, соседние по углу, были разноцветными. Пусть ℓ — прямая, не параллельная сторонам клеток. Для каждого отрезка I, параллельного ℓ, посчитаем разность сумм длин его красных и синих участков. Докажите, что существует число C (зависящее только от прямой ℓ) такое, что все полученные разности не превосходят C.

(*И. Богданов, К. Сухов*)

Решение. Лемма. *Раскрасим клетки плоскости в два цвета: нечётные столбцы в зелёный цвет, а чётные — в жёлтый. Тогда для любого отрезка, параллельного прямой ℓ, разность сумм длин его зелёных и жёлтых участков не превосходит некоторого числа D, зависящего только от ℓ.*

Доказательство. Прямая ℓ разбивается вертикальными сторонами клеток на отрезки одинаковой длины; обозначим эту длину через F. Тогда для любого отрезка длины $2F$, параллельного ℓ, суммы длин его зелёных и жёлтых частей равны F. А любой отрезок, параллельный ℓ, разбивается на такие отрезки и остаток длины, меньшей $2F$; поэтому разность сумм длин его зелёных и жёлтых частей не превосходит $D = 2F$. □

Перейдём к решению задачи. Раскрасим все чёрные клетки в розовый и голубой цвета так, чтобы розовые клетки были в тех же столбцах, что и красные, а голубые — в тех же, что и синие (см. рис. 3). Рассмотрим любой отрезок, параллельный ℓ, и обозначим через r, b, r', b' суммы длин его красных, синих, розовых и голубых частей, соответственно. Тогда по лемме существуют такие числа D_1, D_2, зависящие только от ℓ, что $|(r+r')-(b+b')| \leqslant D_1$, $|(r+b')-(r'+b)| \leqslant D_2$. Значит,

К	Г	К	Г
Р	С	Р	С
К	Г	К	Г
Р	С	Р	С

Рис. 3

$$2|r-b| = |(r+r')-(b+b')+(r+b')-(r'+b)| \leqslant$$
$$\leqslant |(r+r')-(b+b')| + |(r+b')-(r'+b)| \leqslant D_1 + D_2,$$

то есть $|r-b| \leqslant \dfrac{D_1+D_2}{2}$, что и требовалось доказать.

Замечание. На самом деле в лемме можно положить $D = F$.

11.4. Дана пирамида $SA_1A_2\ldots A_n$, основание которой — выпуклый многоугольник $A_1\ldots A_n$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$ в плоскости основания построили треугольник $X_iA_iA_{i+1}$, равный треугольнику SA_iA_{i+1} и лежащий по ту же сторону от прямой A_iA_{i+1}, что и основание (мы полагаем $A_{n+1} = A_1$). Докажите, что построенные треугольники покрывают всё основание.

(*И. Пак*)

Первое решение. Рассмотрим произвольную точку P основания и докажем, что она покрыта одним из треугольников. Рассмотрим маленькую сферу, лежащую внутри пирамиды и касающуюся основания в точке P (такая, очевидно, найдётся). Начнём увеличивать её радиус, сохраняя условие касания; тогда в некоторый момент она впервые коснётся боковой поверхности пирамиды. Пусть, скажем, она коснулась грани SA_1A_2 в точке Q (см. рис. 4). Тогда $PA_1 = QA_1$, $PA_2 = QA_2$ как касательные из одной точки; стало быть, треугольники PA_1A_2 и QA_1A_2 равны. Это значит, что при повороте грани SA_1A_2 вокруг A_1A_2, переводящем её в $X_1A_1A_2$, точка Q переходит в P, то есть P лежит внутри $X_1A_1A_2$.

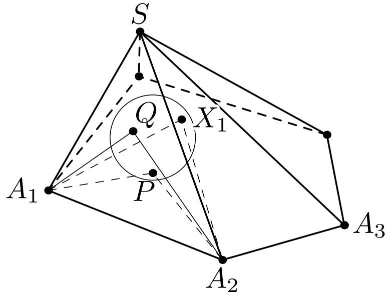

Рис. 4

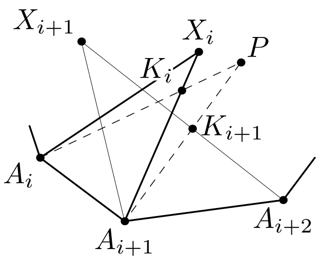

Рис. 5

Второе решение. Предположим, что некоторая точка P основания не покрыта треугольниками. Если $\angle PA_1A_2 \leqslant \angle X_1A_1A_2$ и $\angle PA_2A_1 \leqslant \angle X_1A_2A_1$, то треугольник $X_1A_1A_2$ накрывает P. Значит, без ограничения общности можно считать, что $\angle PA_2A_1 > \angle X_1A_2A_1$.

Если α, β, γ — плоские углы трёхгранного угла, то $\alpha < \beta + \gamma$; поэтому $\angle A_1A_2A_3 < \angle A_1A_2S + \angle A_3A_2S = \angle X_1A_2A_1 + \angle X_2A_2A_3 < \angle PA_2A_1 + \angle X_2A_2A_3$. Значит, $\angle PA_2A_3 = \angle A_1A_2A_3 - \angle PA_2A_1 < \angle X_2A_2A_3$. Если вдобавок и $\angle PA_3A_2 \leqslant$

$\leqslant \angle X_2A_3A_2$, то треугольник $X_2A_2A_3$ накрывает P, что неверно. Значит, $\angle PA_3A_2 > \angle X_2A_3A_2$.

Итак, из неравенства $\angle PA_2A_1 > \angle X_1A_2A_1$ мы получили, что $\angle PA_2A_3 < \angle X_2A_2A_3$ и $\angle PA_3A_2 > \angle X_2A_3A_2$. Продолжая такие рассуждения дальше, получаем, что при любом $i = 1, 2, \ldots, n$ верны неравенства $\angle PA_iA_{i+1} < \angle X_iA_iA_{i+1}$ и $\angle PA_{i+1}A_i > \angle X_iA_{i+1}A_i$. Это значит, что отрезки X_iA_{i+1} и PA_i пересекаются (см. рис. 5). Обозначив точку их пересечения через K_i, из неравенства треугольника получаем, что $X_iA_i+PA_{i+1} < (X_iK_i+K_iA_i)+(PK_i+K_iA_{i+1}) = X_iA_{i+1}+PA_i$, то есть $SA_i + PA_{i+1} < SA_{i+1} + PA_i$. Но, складывая такие неравенства при всех $i = 1, 2, \ldots, n$, получаем $(SA_1 + \ldots + SA_n) + (PA_1 + \ldots + PA_n) < (SA_1 + \ldots + SA_n) + (PA_1 + \ldots + PA_n)$, что неверно. Противоречие.