11 класс

11.5. Углы треугольника α, β, γ удовлетворяют неравенствам $\sin\alpha > \cos\beta$, $\sin\beta > \cos\gamma$, $\sin\gamma > \cos\alpha$. Докажите, что треугольник остроугольный. *(И. Богданов)*

Решение. Предположим противное; пусть для определённости $\gamma \geqslant 90^\circ$. Тогда $\alpha+\beta \leqslant 90^\circ$, и углы α и β острые. Поэтому $0 < \beta \leqslant 90^\circ - \alpha < 90^\circ$, откуда $\cos\beta \geqslant \cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, что противоречит условию.

Комментарий. Могут встретиться работы, в которых участник использует монотонность тригонометрической функции на интервале, на котором она на самом деле немонотонна (например, функции $\sin x$ на интервале $(0^\circ, 180^\circ)$ или $\cos x$ на $(-90^\circ, 90^\circ)$). Такие решения оцениваются в 0 баллов.

11.6. В основании четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит параллелограмм $ABCD$. Докажите, что для любой точки O внутри пирамиды сумма объёмов тетраэдров $OSAB$ и $OSCD$ равна сумме объёмов тетраэдров $OSBC$ и $OSDA$. *(Д. Терёшин)*

Решение. Пусть X — точка пересечения луча SO с плоскостью $ABCD$ (см. рис. 3). Так как точка O лежит внутри пирамиды, то точка X лежит внутри ее основания. При этом $S_{XAB} + S_{XCD} = S_{XBC} + S_{XDA}$ (одно из возможных доказательств этого факта усматривается из рис. 4 — каждая из сумм равна половине площади параллелограмма $ABCD$). Следовательно,

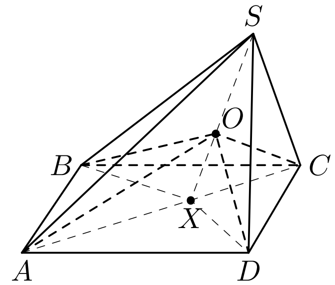

Рис. 3

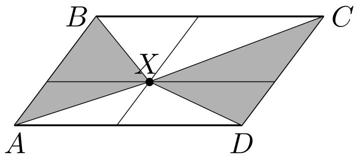

Рис. 4

$$V_{XSAB} + V_{XSCD} = V_{XSBC} + V_{XSDA}, \qquad (1)$$

так как высота этих пирамид, опущенная из вершины S, общая. Аналогично,

$$V_{XOAB} + V_{XOCD} = V_{XOBC} + V_{XODA}. \qquad (2)$$

Вычитая из равенства (1) равенство (2), получаем требуемое.

Комментарий. Разобран только случай, когда точка O лежит на основании — 3 балла.

11.7. Целые числа a, b, c таковы, что значения квадратных трёхчленов $bx^2 + cx + a$ и $cx^2 + ax + b$ при $x = 1234$ совпадают. Может ли первый трёхчлен при $x = 1$ принимать значение 2009? *(П. Козлов)*

Ответ. Не может.

Решение. Первое решение. Подставляя $x = 1234$ в оба трёхчлена и приравнивая их, получаем $1234^2 \cdot b + 1234 \cdot c + a = 1234^2 \cdot c + 1234 \cdot a + b$, или, после переноса всех членов в левую часть, $(1234^2 - 1)b + (1234 - 1234^2)c + (1 - 1234)a = 0$. Разделив последнее равенство на 1233, имеем $1235b - 1234c - a = 0$, то есть $a = 1235b - 1234c$. Тогда значение первого трёхчлена в точке 1 равно $a + b + c = 1236b - 1233c = 3(412b - 411c)$, то есть делится на 3; значит, оно не может равняться 2009.

Второе решение. Рассмотрим многочлен $P(x) = (b-c)x^2 + (c - a)x + (a - b)$ — его степень не больше 2. По условию, $P(1234) = 0$; кроме того, очевидно, $P(1) = 0$. Значит, если его степень равна 2, то по теореме Безу $P(x) = (b-c)(x-1)(x-1234)$. Если же степень меньше 2, то он может быть только нулевым (поскольку у него есть два корня); тогда $a = b = c$, и всё равно верно равенство $P(x) = (b - c)(x - 1)(x - 1234)$. Приравнивая свободные члены в равенстве

$$P(x) = (b - c)x^2 + (c - a)x + (a - b) = (b - c)(x - 1)(x - 1234),$$

получаем $a - b = 1234(b - c)$, откуда $a = 1235b - 1234c$. Дальше решение можно завершить так же, как и предыдущее.

Комментарий. Только ответ без обоснования или с неверным обоснованием — 0 баллов. Получено соотношение $a = 1235b - 1234c$ — ставить 2 балла.

11.8. В клетки квадрата 100×100 расставили числа 1, 2, ..., 10000, каждое — по одному разу; при этом числа, различающиеся на 1, записаны в соседних по стороне клетках. После этого посчитали расстояния между центрами каждых двух клеток, числа в которых различаются ровно на 5000. Пусть S — минимальное из этих расстояний. Какое наибольшее значение может принимать S?

(*И. Богданов*)

Ответ. $50\sqrt{2}$.

Решение. Пронумеруем в квадрате строки (снизу вверх) и столбцы (слева направо) числами от 1 до 100; будем обозначать клетку парой номеров ее строки и столбца. Назовем *расстоянием* между клетками расстояние между их центрами. Клетки назовем *парными*, если числа в них различаются на 5000.

Заметим, что расстояние от клетки $(50, 50)$ до любой другой (в частности, до парной ей) не превосходит $\sqrt{50^2 + 50^2} = 50\sqrt{2}$. Значит, и минимальное расстояние между парными клетками

также не превосходит $50\sqrt{2}$. Осталось привести пример, когда этот минимум достигается.

Разобьем наш квадрат на четыре квадрата 50×50. Расставим числа 1–2500 согласно правилам в левом нижнем квадрате так, чтобы число 1 стояло в клетке $(1, 1)$, а число 2500 — в клетке $(50, 1)$ (это возможно; например, первые 50 чисел в первом столбце, вторые — во втором и т. д.). Далее, если число $a \in [1, 2500]$ стоит в клетке (i, k), то поставим числа $a + 2500$, $a + 5000$ и $a + 7500$ соответственно в клетки $(k + 50, i)$, $(k + 50, i + 50)$ и $(51 - i, 101 - k)$. Нетрудно видеть, что при этом числа по-прежнему расставлены согласно правилам (для соседних чисел в одном квадрате это очевидно; для чисел 2500–2501, 5000–5001 и 7500–7501 проверяется непосредственно).

Осталось проверить, что расстояния между парными клетками не меньше $50\sqrt{2}$. Рассмотрим отрезок между любыми парными клетками. Сумма его горизонтальной и вертикальной проекций равна либо $(50 + k - i) + (50 + i - k) = 100$, либо $(k + 50 - 51 + i) + (101 - k - i) = 100$, то есть она всегда равна 100. Значит, квадрат длины этого отрезка равен $x^2 + (100 - x)^2 = 2(x - 50)^2 + 5000 \geqslant 5000 = (50\sqrt{2})^2$, что и требовалось.

64	57	56	49	48	47	46	45
63	58	55	50	41	42	43	44
62	59	54	51	40	39	38	37
61	60	53	52	33	34	35	36
4	5	12	13	32	31	30	29
3	6	11	14	25	26	27	28
2	7	10	15	24	23	22	21
1	8	9	16	17	18	19	20

Рис. 5

На рис. 5 приведен пример аналогичной расстановки в квадрате 8×8.

Замечание. Предъявленный пример не единственен.

Точно так же строится пример в любом квадрате $4n \times 4n$. В квадрате $(4n+2) \times (4n+2)$ подобная расстановка тоже возможна.

Комментарий. Доказано только, что $S \leqslant 50\sqrt{2}$ — ставить 2 балла.