10 класс

10.1. **Ответ.** 3 ребят.

Покажем, что всегда можно выбрать трёх ребят так, чтобы у них нашлись карандаши всех цветов. Так как карандашей каждого цвета 10, а каждому досталось по 4 карандаша, то кому-то достались карандаши по крайней мере двух различных цветов. Осталось добавить к нему двух ребят, у которых есть карандаши оставшихся двух цветов.

Покажем теперь, как раздать карандаши ребятам, чтобы у любых двух из них вместе были карандаши не более трех цветов. Раздадим двум ребятам по 4 карандаша второго цвета, двум — по 4 карандаша третьего цвета, двум — по 4 карандаша четвертого цвета, одному — 4 карандаша первого цвета, одному — по 2 карандаша первого и второго цвета, одному — по 2 карандаша первого и третьего цвета, и еще одному — по 2 карандаша первого и четвертого цвета.

10.2. См. решение задачи 9.2.

10.3. Пусть для определённости $AB > AC$ (см. рис. 4). Обозначим через L середину отрезка AB. Заметим, что $\angle AOL = \frac{1}{2}\angle AOB = \angle ACB$. Отсюда $\angle BAO = 90^\circ - \angle AOL = 90^\circ - \angle ACB = \angle CAD$.

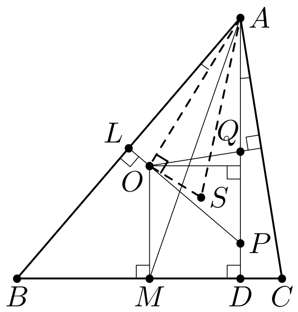

Рис. 4

Стороны треугольника OPQ перпендикулярны соответственно сторонам треугольника ABC, поэтому $\triangle OPQ$ подобен $\triangle ABC$: он получается из $\triangle ABC$ последовательным выполнением поворота на 90° и гомотетии с некоторым коэффициентом k. Так как OS и AO — соответственные отрезки в треугольниках OPQ и ABC, то $OS \perp AO$ и $OS = k \cdot AO$. Далее, отрезок MD равен высоте треугольника OPQ, проведенной к стороне PQ, поэтому $MD = k \cdot AD$. Значит, прямоугольные треугольники AOS и ADM подобны, поэтому $\angle SAO = \angle MAD$.

Окончательно, $\angle BAS = \angle BAO + \angle SAO = \angle CAD + \angle MAD = \angle CAM$.

10.4. **Ответ.** $9744 = 100^2 - 16^2$ клеток.

Лемма. *Пусть полоска $1 \times k$ заполнена натуральными числами. Тогда в ней можно закрасить несколько непересекающихся хороших прямоугольников, содержащих не меньше $k - 16$ клеток.*

Доказательство. Индукция по k. При $k \leqslant 16$ ничего красить не надо. Пусть $k \geqslant 17$. Пусть в 17 левых клетках стоят числа $a_1, \ldots, a_{17}$. Среди чисел $0, a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + \ldots + a_{17}$ найдутся два, дающие одинаковый остаток от деления на 17. Тогда их разность, имеющая вид $a_i + a_{i+1} + \ldots + a_j$, будет делиться на 17. Удалим клетки с i-й по j-ю из полоски. Оставшиеся клетки будем считать одной полоской длины $k - (j - i + 1)$. Применив к ней предположение индукции, мы закрасим несколько хороших прямоугольников так, что останется не более 16 незакрашенных клеток. Тогда в исходной полоске можно закрасить те же клетки, а также клетки с i-й по j-ю (они либо образуют новый хороший прямоугольник, либо попадут внутрь старого). $\square$

Перейдём к задаче. Покажем, что можно оставить не более $16^2 = 256$ незакрашенных клеток. Рассмотрим полоску 1×100, в клетки которой записаны суммы чисел в столбцах исходного квадрата. Применив к ней утверждение леммы, мы найдём несколько хороших прямоугольников. Тогда в исходном квадрате можно закрасить соответствующие прямоугольники высоты 100. После этого незакрашенными останутся не более 16 столбцов. Применим теперь лемму к каждому из них по отдельности; в каждом столбце останется не более 16 незакрашенных клеток, т. е. всего не более 256 клеток.

Осталось привести пример расстановки, в котором нельзя оставить менее 256 клеток незакрашенными. Расставим в каком-нибудь квадрате 16×16 единицы, а во всех остальных клетках — нули. Рассмотрим произвольный прямоугольник P; если он содержит единицу, то он пересекается с квадратом по некоторому прямоугольнику $a \times b$ $(1 \leqslant a, b \leqslant 16)$; но тогда сумма всех чисел в P будет равна ab, что не может быть кратным 17. Таким образом, ни одна клетка с единицей закрашена не будет, а значит, останется хотя бы 256 незакрашенных клеток.