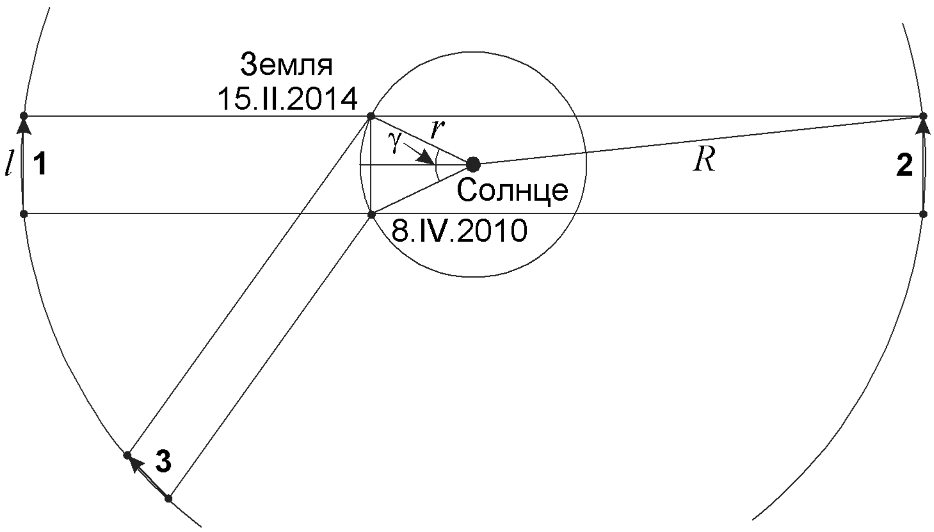
Две Олимпиады (О.С. Угольников)

Класс: 9 10 11 Задача: 1

? В середине двух олимпиад, проходящих в Краснодарском крае – XVII Всероссийской олимпиады по астрономии (Анапа, 8 апреля 2010 г.) и XXII Зимних Олимпийских игр (Сочи, 15 февраля 2014 г.) некий транснептуновый объект с круговой орбитой наблюдается в одной и той же точке неба (относительно звезд). Найдите минимально возможное значение радиуса орбиты этого объекта. Орбиту Земли считать также круговой, астрономической аберрацией пренебречь.



! Изобразим на рисунке орбиту Земли и ее положения в две указанные даты.

За период между этими датами Земля совершила три полных оборота вокруг Солнца и сделала большую часть четвертого оборота, до его завершения ей осталось пройти дугу с углом γ. Считая орбиту Земли круговой и ее движение по ней равномерным, находим этот угол:

$$\gamma = 360^{\circ} \frac{52}{365.25} = 51^{\circ}.$$

Здесь было принято, что продолжительность года составляет ровно 365.25 суток, и положения Земли 8 апреля 2010 и 2014 годов совпадают. Тогда четвертый оборот Земля завершит 8 апреля 2014 года, то есть через 52 дня после середины XXII зимних Олимпийских игр. Расстояние между двумя положениями Земли составляет

$$l = 2r\sin\frac{\gamma}{2} = 0.86 \text{ а.е.}$$

Класс: 9 10 Задача: 3

? Когда в последний раз совпадало начало нового года в Григорианском и Юлианском календарях? Когда такое совпадение может случиться снова? Считать, что начало года всегда приходилось и будет приходиться на 1 января, а календари использовались и будут использоваться в искомые годы.

! Цикл григорианского календаря, то есть время, по истечении которого порядок високосных годов в точности повторяется, составляет 400 лет. За это время григорианский и юлианский календари расходятся на 3 дня, поскольку за 400 лет в григорианском календаре на 3 високосных года меньше, чем в юлианском.

Сейчас два календаря расходятся на 13 дней. Последний раз начало года будет различаться на 13 дней в 2100 году. Этот год будет високосным в юлианском календаре, но не будет таковым в григорианском, и после февраля 2100 года разница увеличится на 1 день. Различие в 12 дней набегает за $12\cdot(400/3)=1600$ лет. То есть, последний раз начало года в обоих календарях отличалось на один день в $2100-1600=500$ году. Надо учесть, что 400 год был високосным в обоих календарях. Значит, разница в один день появилась только в феврале 300 года, который был високосным по юлианскому календарю и простым – по григорианскому.

Итого, последний раз начало года в юлианском и григорианском календарях совпадало 1 января 300 г. н.э.

В следующий раз оба начала календарных года совпадут только тогда, когда разница между ними составит 1 календарный год. Разность в 363 дня накопится за $363\cdot(400/3)=48400$ лет или за 121 четырехсотлетний цикл. Если учесть, что в первый раз начало календарного года в обоих календарях совпало 1 января 201 года, то после 1 января 48601 года разница в началах года в первый раз достигнет 363 дней; после 1 января 48701 года – 364 дней. Год 48800 является високосным в обоих календарях, поэтому совпадение начала года произойдет после 48900 года. Остается уточнить, когда именно.

48900 год будет високосным в юлианском календаре и простым – в григорианском календаре. Как и в предыдущем 48899 году, разница между ними составит 364 дня. 1 января 48900 года по старому стилю совпадет с 31 декабря 48900 года по новому стилю. На следующий день наступит 48901 год по григорианскому календарю. В феврале этого года в юлианском календаре будет вставлен дополнительный день. Таким образом, 1 января 48902 года григорианского календаря совпадет с 1 января 48901 года юлианского календаря.

“Аполлон-11” (О.С. Угольников)

Класс: 9 10 Задача: 5

? В июле 1969 года американские астронавты Нил Армстронг и Эдвин Олдрин совершили посадку на поверхность Луны и провели на ней 21 час 36 минут. Сколько раз они могли выходить на прямую связь (без участия Земли) с третьим членом экипажа Джоном Коллинзом, и какова могла быть максимальная длительность каждого сеанса? Коллинз находился в командном модуле, обращающимся вокруг Луны по круговой орбите, проходящей над местом прилунения Армстронга и Олдрина на высоте 111 км. Орбитальное и осевое вращение Луны не учитывать.

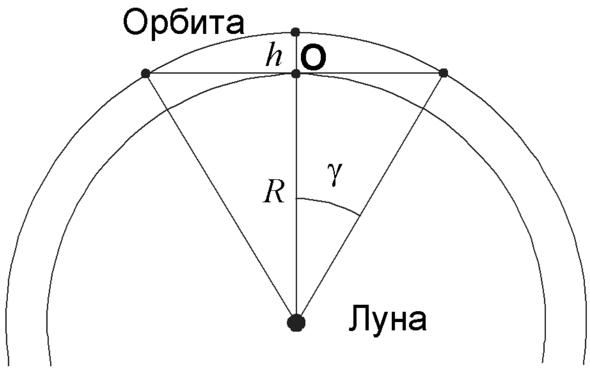
! Изобразим Луну и орбиту командного модуля, проходящую над местом посадки (точка **О**). Обозначим радиус Луны через *R*, а высоту модуля над поверхностью Луны – через *h*.

Определим, при каком угловом перемещении по орбите γ (относительно положения над местом посадки) командный модуль окажется на лунном горизонте:

$$\gamma = \arccos\frac{R}{R+h} = 20^{\circ}.$$

Получается, что прямую связь с Джоном Коллинзом можно было поддерживать, пока командный модуль располагался внутри 40°-дуги своей орбиты, что составляет 1/9 часть ее полной длины. Найдем теперь орбитальный период командного модуля:

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{(R+h)^3}{GM}}.$$



Здесь M – масса Луны. Численная подстановка дает результат: 1.98 часа. За время T, которое Нил Армстронг и Эдвин Олдрин провели на Луне (21.6 часа), командный модуль почти завершил 11 оборотов. Именно столько сеансов прямой связи можно было организовать за данный период. Продолжительность каждого сеанса могла составлять 1/9 орбитального периода t, то есть 13.2 минуты.

Две звезды – северное полушарие (Е.Н. Фадеев)

Класс: **10** Задача: **2**

? Северное полярное расстояние звезды А равно склонению звезды В. Верхняя кульминация звезды В происходит на той же высоте, что и нижняя кульминация звезды А. На какой широте в северном полушарии находится наблюдатель, если во время верхней кульминации звезды А ее зенитное расстояние составляет четверть ее склонения?

! Обозначим широту буквой φ, высоту – h, зенитное расстояние $z = 90° - h$, склонение δ, северное полярное расстояние $p = 90° - \delta$.

Обратим внимание, что полярное расстояние любой точки небесной сферы (в том числе звезды **А**) – величина положительная, следовательно, склонение звезды **В** положительно. Верхняя кульминация звезды **В** в северном полушарии происходит над горизонтом, как и нижняя кульминация звезды **A**. Таким образом, звезда **A** также располагается севернее небесного экватора. В северном полушарии Земли для нижней кульминации звезды в северном небесном полушарии справедливо уравнение

$$\varphi = h + p_A.$$

Из условия неизвестно, к северу или к югу от зенита происходила кульминация звезды **B**. Для кульминации к северу от зенита справедливо уравнение

$$\varphi = \delta_B - 90° + h.$$

Система уравнений

$$\begin{cases} \varphi = h + p_A \\ \varphi = \delta_B - 90° + h \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = h + p \\ \varphi = h + p - 90° \end{cases}$$

решений не имеет. Значит, кульминация звезды **B** могла произойти только к югу от зенита. В этом случае имеем систему уравнений

$$\begin{cases} \varphi = h + p_A \\ \varphi = 90° - h + \delta_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = h + p \\ \varphi = 90° - h + p \end{cases}.$$

Отсюда

$$h + p = 90° - h + p; \quad h = 45°,$$

и

$$\varphi = p_A + 45 = \delta_B + 45°.$$

Известно, что во время верхней кульминации звезды **A** ее зенитное расстояние составляет четверть ее склонения. Однако, неизвестно, к северу или к югу от зенита происходит эта верхняя кульминация. Рассмотрим оба варианта. Если кульминация произошла к северу от зенита, тогда

$$\varphi = \delta_A - z = \delta_A - \frac{\delta_A}{4} = \frac{3}{4}\delta_A,$$

$$\frac{4}{3}\varphi = \delta_A = 90° - p_A.$$

Складывая последнее уравнение с полученным ранее, получаем $7\varphi/3 = 135°$, и широта составляет около +58°. Соответственно, склонение звезды B равно +13°. Рассмотрим теперь случай, когда звезда A кульминирует к югу от зенита. Тогда

$$\varphi = \delta_A + z = \frac{5}{4}\delta_A,$$

$$\frac{4}{5}\varphi = 90° - p_A.$$

Проводя аналогичную операцию, получаем $9\varphi/5 = 135°$. Это приводит к значению широты +75°. Соответственно, $\delta_B = 30°$.

В итоге, задание имеет два ответа: широта составляет либо около +58°, либо +75°.

Дорога к башне (О.С. Угольников)

Класс: 10 11 Задача: 4

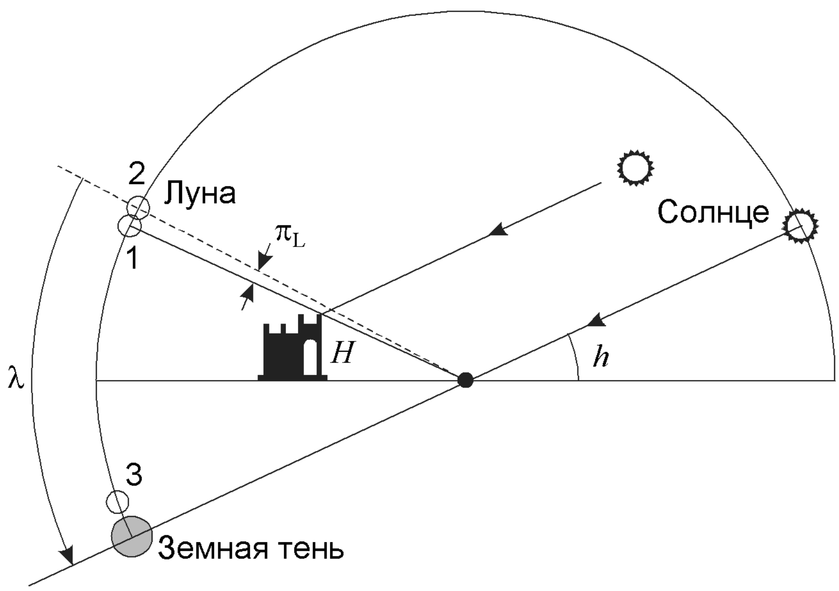
? ***"Путник вышел на прямую дорогу, ведущую ко входу в высокую башню. Прямо над ней появился силуэт Луны, который был как будто закреплен на башне. А в маленьком вертикальном окне на самом верху, смотрящем точно на дорогу, отразился луч вечернего Солнца. Путник направился к башне и, достигнув ее, заметил, что Солнце за это же время вдвое приблизилось к горизонту.***

На следующий вечер Луна, не успев появиться на небе, вдруг стала блекнуть, а потом приобрела страшный темно-красный лик..."

Считая скорость путника равной 3 км/ч, определите высоту башни. Наклоном лунной орбиты к эклиптике, ее эксцентриситетом, а также атмосферной рефракцией пренебречь.

! Поместим начальное положение путешественника в центр небесной сферы и изобразим ее проекцию на плоскость, содержащую зенит и вершину башни. Очевидно, что в момент начала пути в этой же плоскости окажется Луна, лежащая на линии "путешественник – вершина башни". В плоскости рисунка окажется и Солнце, так как его луч отражается окном, перпендикулярным этой плоскости, и приходит к путешественнику вместе с лучом от Луны.

Обозначим на рисунке положение Луны в момент начала пути цифрой 1. По условию задачи, мы пренебрегаем наклоном орбиты Луны к плоскости эклиптики. Тогда оба светила находятся на эклиптике. В то же время они располагаются в плоскости рисунка и не находятся в совпадающих либо противоположных точках небесной сферы. Следовательно, плоскость рисунка совпадает с плоскостью эклиптики, а большой круг небесной сферы, проходящий через Солнце и Луну и изображенный на рисунке – есть сама линия эклиптики.



Данная линия проходит через зенит наблюдателя. Такое может быть только в тропическом поясе Земли с модулем широты φ не более величины наклона экватора к эклиптике ε (23.4°).

Перейдем в геоцентрическую систему отсчета (или, проще говоря, представим, что радиус Земли несравнимо меньше расстояния до Луны). Это практически не изменит видимого положения далекого Солнца, но скажется на расположении Луны. Вместо положения 1 она будет находиться в положении 2, выше над горизонтом на угол π_L. Луне остается 1 день до фазы полнолуния (и лунного затмения), поэтому ее высота над горизонтом, очевидно, невелика. Тогда угол π_L с хорошей точностью равен горизонтальному параллаксу Луны, составляющему 0.95°. При этом Луна останется в плоскости эклиптики, так как последняя в данный момент перпендикулярна горизонту.

Для простоты дальнейших рассуждений будем считать, что Солнце не движется по эклиптике, а Луна перемещается по ней равномерно с синодическим периодом T (29.53 суток). Равномерность этого движения связана с пренебрежением эксцентриситетом орбиты Луны по условию задачи. Угловая скорость этого движения равна

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Здесь и далее углы в формулах приводятся в радианной мере. За счет суточного вращения небесной сферы Солнце движется под углом $((\pi/2) - |\varphi|)$ к горизонту. Угловая скорость этого движения составит

$$\Omega = \frac{2\pi\cos\delta}{T_0}.$$

Здесь T_0 – продолжительность солнечных суток, δ – склонение Солнца. Обозначим высоту Солнца над горизонтом в момент начала пути через h, а время перемещения путешественника к башне через t. За это время Солнце опустилось к горизонту на высоту $h/2$. Учитывая, что величина h невелика, получаем:

$$\Omega\sin\left(\frac{\pi}{2} - |\varphi|\right)\cdot t = \frac{2\pi}{T_0}\cos\delta\,\cos\varphi\cdot t = \frac{h}{2}.$$

Величины δ и φ нам неизвестны. Однако мы знаем, что их модуль не превосходит 23.4°, а их косинусы близки к единице (не меньше 0.92). На самом деле, это произведение можно оценить еще точнее, если учесть, что δ – склонение точки эклиптики у горизонта (Солнца), а φ – широта места, равная склонению другой точки эклиптики, отстоящей от первой практически на 90°. С точностью до $\sin^4\varepsilon/8$ (около 0.3%) выполняется соотношение

$$\cos\delta\cos\varphi = \cos\varepsilon,$$

в чем можно убедиться для элементарных случаев точек равноденствий и солнцестояний. В итоге,

$$h = \frac{4\pi}{T_0}\cos\varepsilon\cdot t.$$

Еще через время t центр Солнца зайдет за горизонт. Далее, через сутки (время T_0), к следующему вечеру, Луна перемещается по эклиптике в положение 3. По условию задачи, с ее восходом (и заходом Солнца, совпадающим с восходом Луны с точностью до нескольких минут) начинается теневое лунное затмение. Так как Луна движется по эклиптике, затмение будет полным, более того – центральным. Если считать орбиту Луны круговой, то ее видимый радиус r_1 составит 0.26°, а радиус земной тени r_2 будет равен 0.69°. Эти величины можно легко рассчитать, вследствие их малости высокая точность не требуется. Наибольшая фаза затмения будет отстоять от захода Солнца на время

$$t_L = \frac{r_1 + r_2}{\omega} = T \cdot \frac{r_1 + r_2}{2\pi},$$

что составляет 1.9 часа. Эту величину можно также оценить, зная реальную продолжительность лунных затмений.

Как видно из рисунка, за период времени с момента начала пути и до середины лунного затмения Луна переместится вдоль эклиптики на угол

$$\lambda = 2h + \pi_L.$$

Нам известна угловая скорость этого движения (ω) и величина времени. Получаем следующее соотношение:

$$\frac{2\pi}{T} \cdot (2t + T_0 + t_L) = 2h + \pi_L.$$

Подставляя выражение для h, полученное выше, получаем уравнение для величины t:

$$4\pi \frac{t}{T} + 2\pi \frac{T_0 + t_L}{T} = 8\pi \frac{t}{T_0} \cos\varepsilon + \pi_L.$$

В результате,

$$t = \left(\frac{T_0 + t_L}{T} - \frac{\pi_L}{2\pi} \right) \cdot \left(\frac{4\cos\varepsilon}{T_0} - \frac{2}{T} \right)^{-1}.$$

Подставляя численные данные, получаем, что путь до башни занял 13.5 минут. Приведенный расчет является наиболее точным. Однако, выкладки можно существенно упростить. Пренебрежем лунным параллаксом и будем считать, что Луна прошла по эклиптике угол $2h$. Учтем также, что величины t_L и t много меньше солнечных суток T_0. Опустим также величины $\cos\varphi$ и $\cos\delta$ (или $\cos\varepsilon$), считая их равными 1. Тогда мы можем получить простое приближенное выражение для времени пути (здесь и далее приближенные величины имеют индекс "A"):

$$t_A = \frac{T_0^2}{4T} = 12 \text{ мин}.$$

Далее, нам нужно определить величину h:

$$h = \frac{4\pi}{T_0} \cos\varepsilon \cdot t;$$

$$h_A = \frac{4\pi}{T_0} \cdot t_A = \pi \frac{T_0}{T}.$$

Переводя в градусную меру, получаем 6.2° и 6.1° соответственно. Наконец, высота башни равна

$$H = v \cdot t \cdot \operatorname{tg} h = 70 \text{ м}.$$

$$H_A = v \cdot t_A \cdot \operatorname{tg} h_A = v \cdot \frac{T_0^2}{4T} \cdot \pi \frac{T_0}{T} = \frac{\pi}{4} v \frac{T_0^3}{T^2} = 65 \text{ м}.$$

Здесь v – скорость путешественника. Несмотря на большое количество допущений, приближенный ответ мало отличается от более точного. Указанный пример показывает высокую эффективность приближенного вычисления при условии его обоснованности.

Пульсирующая переменная звезда (О.С. Угольников)

Класс: **10** Задача: **6**

? Пульсирующая переменная звезда изменяет свои характеристики так, что отношение тепловой и второй космической скорости вещества на поверхности звезды остается постоянным. Найдите соотношение размеров звезды в максимуме и минимуме яркости, если известно, что амплитуда изменений блеска составляет 1^m. Вещество поверхности звезды считать неионизованным и находящимся в термодинамическом равновесии.

! По условию задачи, вещество у поверхности звезды состоит из нейтральных атомов. В этом случае средняя тепловая скорость атома составляет

$$v_T = \sqrt{\frac{3kT}{\mu}},$$

где μ – масса атома, T – кинетическая температура вещества на поверхности звезды. Так как это вещество находится в состоянии термодинамического равновесия, эта величина совпадает с эффективной температурой звезды. Вторая космическая скорость равна

$$v_2 = \sqrt{\frac{2GM}{R}},$$

где M и R – масса и радиус звезды. Отношение этих скоростей будет равно

$$\frac{v_T}{v_2} = \sqrt{\frac{3kTR}{2GM\mu}} = \sqrt{\frac{3k}{2GM\mu} \cdot TR} = const$$

Величины массы звезды и массы атома не изменяются (вспомним, что по условию задачи вещество остается нейтральным). Следовательно,

$$T \cdot R = const.$$

Иными словами, температура звезды обратно пропорциональна ее радиусу. Пусть T_1 и R_1 – температура и радиус звезды в максимуме блеска, а T_2 и R_2 – аналогичные характеристики в минимуме блеска. Так как кинетические температуры в обоих случаях совпадают с эффективными, мы можем выразить величину изменения блеска:

$$m_2 - m_1 = -2.5 \lg \frac{R_2^2 T_2^4}{R_1^2 T_1^4} = -2.5 \lg \frac{R_1^2}{R_2^2} = 1.$$

Отсюда получаем соотношение радиусов:

$$\frac{R_1}{R_2} = 10^{-0.2} = 0.63.$$

Отметим, что в максимуме блеска звезда меньше, чем в минимуме.